Estimado alumno: la siguiente evaluación está estructurada en cuatro ejercicios. Tienes dos horas para su resolución, por lo que te aconsejamos que distribuyas adecuadamente tu tiempo, dado que no todos los ejercicios tienen la misma dificultad. Esperamos que realices un buen trabajo. ☺

Criterio de aprobación: Para aprobar este examen con la calificación de cuatro (4) necesitas realizar de manera correcta, sin errores algebraicos y justificando adecuadamente, por lo menos cuatro de los siete ítems propuestos (el ejercicio 3 equivale a dos ítems).

Ejercicio 1

Un comerciante estima que la relación entre el precio de su producto (p) y la cantidad de unidades producidas y vendidas está dada por p = -q + 2. El costo de producir y vender q unidades del producto está dado por $C(q) = q^2 + 3q + 10$. Determinar el incremento promedio del beneficio del comerciante cuando el número de unidades vendidas se incrementa de 6 a 10. Interpretar en términos del problema.

Ejercicio 2

Dadas las funciones $f: A \subseteq \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R} \,/\, f(\mathrm{x}) = \frac{4x^2 - x}{x^3 - x^2 + 5x}$, $g: B \subseteq \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R} \,/\, g(\mathrm{x}) = \frac{x-2}{x^2+4x+4}$

a. Representar gráficamente la función g.
b. Hallar la derivada de la función h, siendo h (x) = f(x).g(x)

Ejercicio 3

Sean las funciones $f: A \subseteq \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R} \,/\, f(\mathrm{x}) = x^3 + 2$, $g: B \subseteq \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R} \,/\, g(\mathrm{x}) = \frac{1}{4}x + 2$

Hallar analítica y gráficamente los puntos de intersección entre f y g.

Ejercicio 4

Sea $f: A \subseteq R \rightarrow R \,/\, f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x \geq -3 \\ (x+3)^2 - 1 & \text{si } x < -3 \end{cases}$

a. Graficar la función f, hallando previamente su dominio.
b. Hallar analíticamente el conjunto de ceros de la función. A partir del gráfico realizado, identificar conjunto de positividad, conjunto de negatividad e imagen de la función.

Resolución

Ejercicio 1

Un comerciante estima que la relación entre el precio de su producto (p) y la cantidad de unidades producidas y vendidas está dada por p = -q + 2. El costo de producir y vender q unidades del producto está dado por $C(q) = q^2 – 3q - 10$. Determinar la tasa de cambio promedio del beneficio del comerciante cuando el número de unidades vendidas se incrementa de 6 a 10. Interpretar en términos del problema.

Recordemos que la función de beneficio (B) está dada por B(q) = I(q) – C(q), donde I(q) = p.q.

Obtengamos primero la función de ingreso (I), utilizando la relación p = -q + 2:

I(q) = p.q = (-q + 2).q

Luego, como la función de costo es $C(q) = q^2 – 3q - 10$, tenemos que la función de Beneficio es

$B(q) = I(q) – C(q) = (-q + 2).q – (q^2 - 3q - 10) = -q^2 + 2q - q^2 + 3q + 10 = -2q^2 + 5q + 10$

$B(q) = -2q^2 + 5q + 10$ FUNCIÒN DE BENEFICIO

Recordemos que la tasa de cambio promedio de una función está dada por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Donde Δx: *variaciòn en la variable independiente*

Luego, la tasa de cambio promedio de la función de beneficio al incrementar el número de unidades vendidas de 6 a 10 es

$$\frac{\Delta B}{\Delta \mathrm{q}} = \frac{B(10) - B(6)}{10 - 6} = \frac{-140 - (-32)}{4} = \frac{-108}{4} = -27$$

El beneficio promedio por cada unidad adicional cuando las ventas se incrementan de 6 a 10 unidades es -27 unidades monetarias.

Ejercicio 2

Dadas las funciones $f: \mathrm{A} \subseteq \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R} \,/\, f(\mathrm{x}) = \frac{4x^2 - x}{x^3 - x^2 + 5x}$, $g: B \subseteq \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R} \,/\, g(\mathrm{x}) = \frac{x-2}{x^2 - 4x + 4}$

a. Representar gráficamente la función g.

Determinemos primero el dominio de la función g. Para ello, deberemos tener en cuenta que el denominador debe ser distinto de cero:

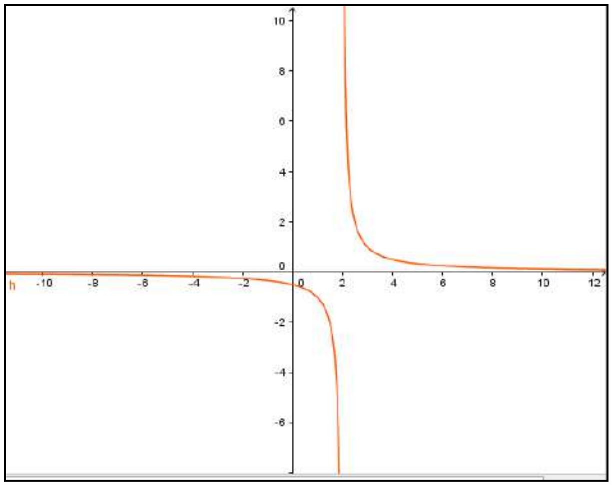
$$x^2 - 4x + 4 \neq 0 \leftrightarrow x \neq 2$$

Luego, $A = Domg = R - \{2\}$

Teniendo en cuenta el dominio de g, vamos a factorizar la función racional g y simplificar si es posible.

$$g(\mathrm{x}) = \frac{x-2}{x^2-4x+4} = \frac{x-2}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2}$$

Luego, la función g se comporta como una función homográfica si $x \neq 2$ y su gráfico es el siguiente



b. Hallar la derivada de la función h, siendo h (x) = f(x).g(x)

Recordemos la regla de derivación de un producto de funciones, si h (x) = f(x).g(x)

$$h'(x) = \big(f(x).g(x)\big)' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x) \qquad \text{(A)}$$

Como las funciones f y g son racionales, calculemos la derivada de cada una de ellas por separado para luego reemplazar en (A).

Recordemos también que para derivar un cociente de funciones utilizamos la regla $\left(\frac{u(\mathrm{x})}{s(\mathrm{x})}\right)' = \frac{u'(x).s(x)-u(x).s'(x)}{(s(x))^2}$

$$f'(\mathrm{x}) = \frac{(8x-1)(x^3-x^2+5x)-(4x^2-x).(3x^2-2x+5)}{(x^3-x^2+5x)^2}$$

$$g'(\mathrm{x}) = \frac{1.(x^2-4x+4)-(x-2).(2x-4)}{(x^2-4x+4)^2}$$

Luego, reemplazando en (A)

$$h'(x) = \big(f(x).g(x)\big)' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$$h'(x) = \frac{(8x-1)(x^3-x^2+5x)-(4x^2-x).(3x^2-2x+5)}{(x^3-x^2+5x)^2} \cdot \frac{x-2}{x^2-4x+4} + \frac{4x^2-x}{x^3-x^2+5x} \cdot \frac{1.(x^2-4x+4)-(x-2).(2x-4)}{(x^2-4x+4)^2}$$

Ejercicio 3

Sean las funciones $f: \mathrm{A} \subseteq \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R} \,/\, f(\mathrm{x}) = x^3 + 2$, $g: B \subseteq \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R} \,/\, g(\mathrm{x}) = \frac{1}{4}x + 2$

Hallar analítica y gráficamente los puntos de intersección entre f y g.

Analíticamente:

Buscamos los puntos de intersección entre los gráficos de f y g. Para ello, igualaremos las funciones para obtener las x para las cuales les corresponde la misma imagen y.

$$f(\mathrm{x}) = g(\mathrm{x})$$

$$x^3 + 2 = \frac{1}{4}x + 2$$

$$x^3 + 2 - \frac{1}{4}x - 2 = 0$$

$$x^3 - \frac{1}{4}x = 0$$

$$x(x^2 - \frac{1}{4}) = 0$$

$$x = 0 \quad o \quad (x^2 - \frac{1}{2}) = 0$$

$$x = 0 \quad o \quad x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = 0 \quad o \quad x = -\frac{1}{2} \quad o \quad x = \frac{1}{2}$$

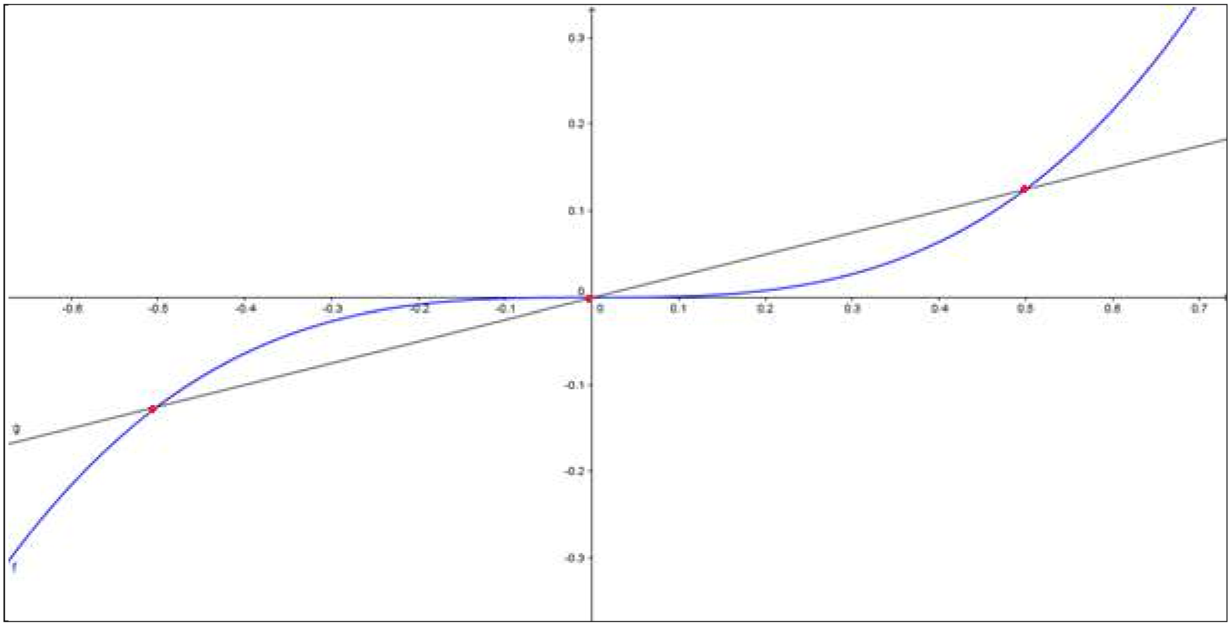
Ahora busquemos las segundas componentes de los puntos de intersección entre f y g

$f(0) = g(0) = 2 \rightarrow (0, 2)$ es punto de intersección

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{8}\right)$ es punto de intersección

$f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{8} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{17}{8}\right)$ es punto de intersección

Gráficamente:



Ejercicio 4

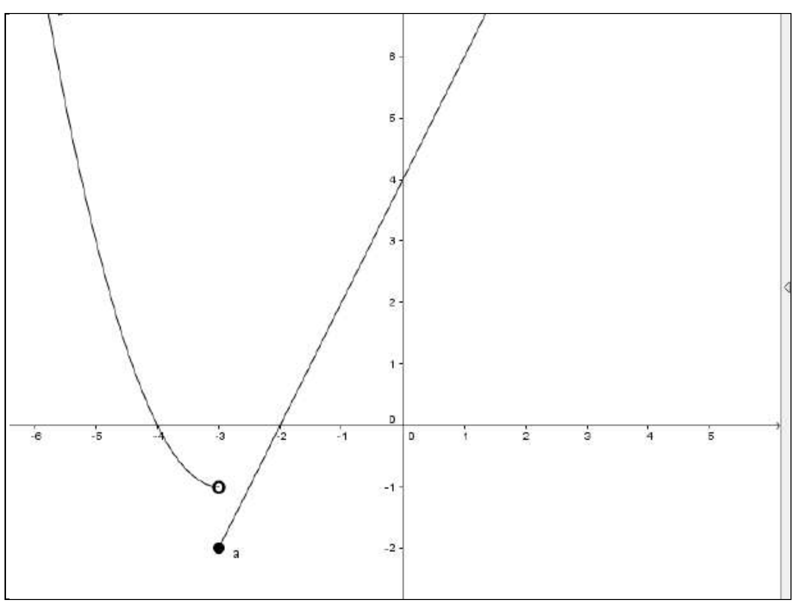
Sea $f: A \subseteq R \to R \;/\; f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x \geq -3 \\ (x+3)^2 - 1 & \text{si } x < -3 \end{cases}$

a. Graficar la función f, hallando previamente su dominio.

Si $x \geq -3$, la función no tiene ninguna restricción, por lo que el intervalo $[-3, +\infty)$ forma parte del dominio de f.

Si $x < -3$, la función no tiene ninguna restricción, por lo que el intervalo $(-\infty, -3)$ también forma parte del dominio de f.

Luego, el dominio de f es $Domf = (-\infty, -3) \cup [-3, +\infty) = R$



b. Hallar analíticamente el conjunto de ceros de la función. A partir del gráfico realizado, identificar conjunto de positividad, conjunto de negatividad e imagen de la función.

Hallemos analíticamente el conjunto de ceros de f.

Si $x \geq -3$, $f(x) = 2x + 4 = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = -2$ y cumple la condición así que $x = -2$ es un cero de f.

Si $x < -3$, $f(x) = (x + 3)^2 - 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = -2$ $(no\ cumple\ la\ condici\grave{o}n)\ o\ \ x = -4$ (cumple la condición) así que $x = -4$ es un cero de f.

Luego, el conjunto de ceros de f es $C^0 = \{-4, -2\}$.

A partir del gráfico de la función, el conjunto de positividad es $C^+ = (-\infty, -4) \cup (-2, +\infty)$, el conjunto de negatividad es $C^- = (-4, -3) \cup [-3, -2) = (-4, -2)$ y su conjunto imagen es $Imf = [-2, +\infty)$.