APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. La recta tangente al gráfico de la función $f(x)$ en el punto $(-2; f(-2))$ es perpendicular a la recta $y = 3x - 1$, pasa por el origen de coordenadas. Determinar el valor de $f(-2)$ y $f'(-2)$.

Para poder hallar $f(-2)$ y $f'(-2)$, primero debemos encontrar la recta tangente a la función con los datos dados. Es decir, debemos hallar la recta $y = mx + b$

Sabemos que dos rectas son perpendiculares si sus pendientes son opuestas e inversas, como la pendiente de la recta dada es 3, entonces $m = -\frac{1}{3}$. Por lo tanto:$y = -\frac{1}{3}x + b$

Asimismo, dicha recta pasa por el origen de coordenadas, es decir el $(0; 0)$ por lo tanto $b = 0$. Entonces:

$$y = -\frac{1}{3}x$$

Por otra parte, una de las características de la recta tangente a una función en el punto dado es que dicho punto pertenezca a la función y a la recta, por lo tanto, podemos hallar $f(-2)$ utilizando a $y = \frac{1}{2}x$. Con lo cual:

$$y = -\frac{1}{3}.(-2)$$

$$y = \frac{2}{3} \rightarrow f(-2) = \frac{2}{3}$$

Por otra parte, sabemos por definición de recta tangente que: $f'(x_0) = m$

Por lo tanto: $f'(-2) = -\frac{1}{3}$.

Para resolver este ejercicio utilizamos los contenidos de derivadas y recta tangente.

2. Sea $f(x) = \log_{(x-2)} 9$, determinar el valor de x que verifica la condición $f(x) = 2$.

Resolvemos la igualdad $f(x) = 2$ para encontrar el valor de x buscado. Recordamos que vale la igualdad $\log_a b = c$ si y sólo si $b = a^c$, cualesquiera sean $a > 0$ y $b > 0, b \neq 1$. Podemos usar esta propiedad aplicada a nuestro caso particular de la siguiente manera:

$$\log_{(x-2)} 9 = 2$$

$$9 = (x-2)^2$$

$$9 = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

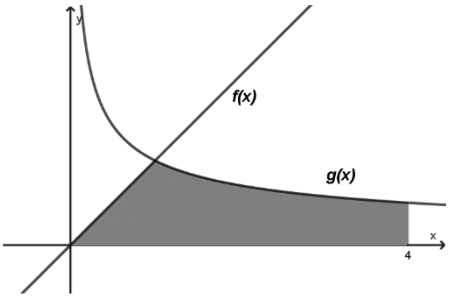
$$x = -1 \qquad x = 5$$

Si $x = -1$, la base del logaritmo se vuelve negativa, y esto no puede ocurrir. En cambio, si $x = 5$ la función f sí queda bien definida. Luego, concluimos que el valor de x que satisface la ecuación es $x = 5$.

3. Calcular el área de la región sombreada sabiendo que

$\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{2}}$

$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$



Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver apuntes de: Integrales - Integral definida – Cálculo de área

En primer lugar, debemos hallar la intersección entre f y g para luego calcular el área sombreada mediante la suma de dos integrales: $f(x) = g(x)$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$x^2 = \frac{1}{x} \qquad (elevando\ al\ cuadrado\ miembro\ a\ miembro)$$

$$x^2 \,.\, x = \frac{1}{x} \,.\, x \qquad (Multiplicamos\ miembro\ a\ miembro\ por\ "x", ya\ que\ x \neq 0\ en\ su\ intersección)$$

$$x^3 = 1$$

$$x = \sqrt[3]{1}$$

$$x = 1$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que el área de una integral puede calcularse como la integral de la función “techo” menos la función que hace de “piso”, podríamos expresar el área total de la siguiente manera:

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 f(x) - 0\,dx + \int_1^4 g(x) - 0\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^4 g(x)dx$$

$$A = \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx + \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

Resolviendo cada integral y aplicando la regla de Barrow:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx + \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \qquad (Por\ \text{prop.}\ \int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)\,dx)$$

$$A = \frac{1}{2} \,.\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\,.\left(2\sqrt{x}\right)\Big|_1^4 = \frac{1}{2}\,.\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\,.\left(2\sqrt{4} - 2\sqrt{1}\right) =$$

$$A = \frac{1}{2}\,.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,.(4-2) = \frac{1}{4} + 1$$

$$A = \frac{5}{4}$$

4. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{x+1}$

Igualamos a cero la derivada para obtener los puntos críticos:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{4} + \frac{-9}{(x+1)^2} = 0$$

$$\frac{(x+1)^2 - 9\,.\,4}{4(x+1)^2} = 0$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1 - 36}{4(x+1)^2} = 0$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

Utilizando $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, con\ a = 1, b = 2, c = -35$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\,.1\,.(-35)}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 12}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-2 - 12}{2} = -\frac{14}{2} = -7$$

Luego,

$$(x-5)(x+7) = 0$$

De donde es:

$$x - 5 = 0 \lor x + 7 = 0$$

Luego, los puntos críticos son $x = 5,\ x = -7\ y\ x = -1$.

La recta $x = -1$ es una asíntota vertical de la función y de su derivada. Lo tenemos en cuenta al considerar los intervalos donde estudiamos el signo de la derivada.

Recordemos que:

- si $f'(x) > 0$ para todo x que pertenece al intervalo $(a;\ b)$, entonces la función f es creciente en el intervalo $(a;\ b)$
- si $f'(x) < 0$ para todo x que pertenece al intervalo $(a;\ b)$, entonces la función f es decreciente en el intervalo $(a;\ b)$.

Analizamos entonces, los intervalos: $(-\infty; -7), (-7; -1), (-1; 5), (5;\ +\infty)$.

Realizamos una tabla:

Intervalo	$(-\infty; -7)$	$(-7; -1)$	$(-1; 5)$	$(5;\ +\infty)$
Para	$x = -8$	$x = -2$	$x = 0$	$x = 6$

Signo de f’	$f'(x) = \frac{13}{196} > 0$	$f'(x) = -\frac{35}{4} < 0$	$f'(x) = -\frac{35}{4} < 0$	$f'(x) = \frac{13}{196} > 0$
Conclusión	f crece en $(-\infty; -7)$	f decrece en $(-7; -1)$	f decrece en $(-1; 5)$	f crece en $(5;\ +\infty)$

Concluimos:

$f'(x) > 0\ en(-\infty; -7)\ \cup\ (5;\ +\infty)$por lo que f es creciente en $(-\infty; -7)\ \cup\ (5;\ +\infty)$.

$f'(x) < 0\ en\ (-7; -1)\ \cup\ (-1; 5)$ por lo que f es decreciente en $(-7; -1)\ \cup\ (-1; 5)$.