

27/09/2023

TEMA 7

Hoja 1 de 4

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	
TEL:	DOCENTE (nombre y apellido):
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Hallar el conjunto de positividad de la función $f(x) = \frac{x-2}{x(x-1)}$

En primer lugar, hallamos el dominio de la función f para conocer el conjunto de puntos donde la misma está definida y sobre el cual vamos a trabajar. Para esto, notamos que la única restricción que presenta esta función es que su denominador no debe anularse. Los valores de x donde el denominador se anula son

$$\begin{aligned} x \cdot (x - 1) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{o bien} \quad x - 1 &= 0 \\ x = 0 \quad \text{o bien} \quad x &= 1 \end{aligned}$$

Luego, el dominio es $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Usamos el teorema de Bolzano para encontrar el conjunto de positividad, y para esto necesitamos conocer previamente el conjunto de ceros.

$$\frac{x - 2}{x(x - 1)} = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Notamos que $x = 2$ pertenece al dominio de la función, y luego $C_0 = \{2\}$. Teniendo en cuenta la raíz $x = 2$, se divide al dominio en los siguientes conjuntos donde evaluaremos el signo de la función: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, +\infty)$.

En $(-\infty, 0)$, tomamos un punto intermedio, digamos $x = -1$, y vemos el signo de la función en ese punto $f(-1) = \frac{-1-2}{(-1)(-1-1)} = \frac{-3}{2} < 0$. Como f es continua, no se anula en ese conjunto, y toma signo negativo en un punto intermedio, por Bolzano la función es negativa en todo el conjunto $(-\infty, 0)$.

Análogamente, en $(0, 1)$ tenemos que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}-2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{4}} > 0$. Luego, f es positiva en todo el intervalo $(0, 1)$.

Aplicando el mismo razonamiento, obtenemos que f es negativa en $(1, 2)$ ya que $f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, y que f es positiva en $(2, +\infty)$ ya que $f(3) > 0$.

Del análisis anterior, concluimos que el conjunto de positividad de f es

$$C_+ = (0, 1) \cup (2, +\infty).$$

APELLIDO Y NOMBRE:

DNI:

TEMA 7
Hoja 2 de 4

2. Hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$, para los cuales $25x - 5x^2 > 0$. Expresar el conjunto obtenido como intervalo o unión de intervalos.

Una forma de resolver este ejercicio es la siguiente. Para resolver la desigualdad, factorizamos la expresión y usamos la regla de los signos:

$$25x - 5x^2 > 0$$

$$5x(5 - x) > 0$$

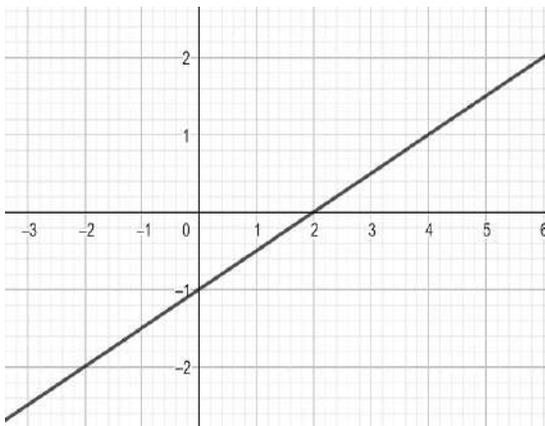
$$x(5 - x) > 0$$

Para que el producto sea positivo, ambos factores deben tener el mismo signo.

Caso 1: $x > 0$ y $5 - x > 0$. Esto es equivalente a $x > 0$ y $x < 5$, cuya solución es el intervalo $(0, 5)$.

Caso 2: $x < 0$ y $5 - x < 0$. Esto es equivalente a $x < 0$ y $x > 5$, pero como no hay ningún valor de x que cumpla con ambas condiciones en simultáneo, la solución de este caso es el conjunto vacío (no hay solución).

Luego, la solución final a la ecuación original es la unión de las soluciones halladas en cada caso, y por lo tanto la misma es $S = (0, 5)$.

3. Hallar la ecuación de la recta que corresponde a la siguiente gráfica:

Por tratarse de una función lineal resulta factible hallar su expresión conociendo las coordenadas de dos de los puntos que pertenecen a la gráfica.

En este caso, la recta viene dada de tal modo que pueden obtenerse dichos puntos a partir de la observación atenta del gráfico, eligiendo a tal fin un par de ellos que posean coordenadas enteras. En efecto, pueden elegirse dos de los siguientes: $(-2; -2)$, $(0; -1)$, $(2; 0)$ y $(4; 1)$.

Si bien podría resultar indistinto tomar dos cualesquiera, conviene empezar con el punto $(0; -1)$ y partir de la forma explícita teniendo en cuenta que la ordenada al origen es -1 (intersección con el eje de ordenadas) Entonces,

$$f(x) = m \cdot x + b \quad \mathbf{(1)}$$

$$f(x) = m \cdot x - 1 \quad \mathbf{(2)}$$

Se llega al mismo resultado si se hace $f(0) = -1$ en **(1)** puesto que el punto $(0; -1)$ verifica la ecuación, es decir, cuando $x = 0$, $y = -1$.

Luego,

$$-1 = m \cdot 0 + b$$

Despejando b resulta,

$$b = -1$$

Para calcular la pendiente se considera alguno de los 3 puntos restantes, por ejemplo, el $(2; 0)$ y se procede en forma análoga reemplazando en **(2)** para hallar el valor de m .

Entonces,

$$\begin{aligned} f(2) &= 0 \\ 0 &= m \cdot 2 - 1 \end{aligned}$$

Se hace el despeje correspondiente:

$$1 = 2m$$

$$m = \frac{1}{2}$$

En definitiva, la ecuación buscada es:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x - 1$$

Fácilmente puede comprobarse que los 4 puntos considerados verifican la ecuación.

Se le ha asignado un nombre a la función en este caso, llamándola f pero podría trabajarse directamente indicando la ecuación de la siguiente manera:

$$y = m \cdot x + b$$

y la respuesta es:

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

4. Hallar, si existe/en, la/las ecuación/es de las asíntotas verticales de $f(x) = \frac{x^3-2}{4-x^2}$

Para realizar un estudio de las asíntotas de una función es fundamental determinar el dominio de la misma. En el caso de la función f , al ser un cociente, debemos analizar para qué valores se anula el denominador:

$$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x = 2 \vee x = -2$$

Por lo tanto:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2, -2\}$$

Estos valores excluidos del dominio pueden ser los que correspondan a las asíntotas verticales, para determinar si lo son debemos evaluar el límite de la función cuando la variable se aproxima a dichos valores.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2}{4 - x^2} = \infty \Rightarrow \mathbf{x = 2 \text{ es Asíntota Vertical}}$$

Cuando la variable toma valores cercanos a 2, el numerador se aproxima a 6 y el denominador a 0, por lo tanto la función toma valores infinitamente grandes o infinitamente pequeños.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 2}{4 - x^2} = \infty \Rightarrow \mathbf{x = -2 \text{ es Asíntota Vertical}}$$

Cuando la variable toma valores cercanos a -2, el numerador se aproxima a -10 y el denominador a 0, por lo tanto la función toma valores infinitamente grandes o infinitamente pequeños.

Para analizar si la función tiene asíntota horizontal debemos evaluar el límite de la función cuando la variable toma valores infinitamente grandes o infinitamente pequeños.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2}{4 - x^2}$$

Tanto numerador como denominador toman valores infinitamente grandes o infinitamente pequeños, por lo tanto se presenta una indeterminación que debemos resolver, para ello dividimos numerador y denominador por x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 - 2}{x^2}}{\frac{4 - x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \frac{2}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - 1} = \infty$$

Cuando la variable toma valores infinitamente grandes o infinitamente pequeños, las expresiones $\frac{2}{x^2}$ y $\frac{4}{x^2}$ toman valores cercanos a 0, por lo tanto numerador tiende a ∞ y el denominador se aproximan a -1, por esto el límite de la función es ∞ .

De acuerdo a la definición, la función **no tiene Asíntota Horizontal**.

En este ejercicio trabajamos con la definición de Asíntota Vertical y Asíntota Horizontal.