APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Dada la función $f(x) = 1 + 2\sqrt{2x^2 - 2}$, hallar el dominio y la imagen.

- **Para la realización de este ejercicio recomendamos ver el material teórico correspondiente a la materia. Será de utilidad ver los siguientes apuntes: "Ecuaciones e inecuaciones", "Valor absoluto", "Intervalos" – Unidad 1 ''funciones (Introducción)'' – Unidad 2.**

Dominio de $f(x)$:

Para determinar el dominio de una función es necesario analizar en su fórmula qué operaciones figuran y si alguna de ellas tiene alguna restricción. En el caso de esta función, las operaciones de suma, resta, multiplicación y potenciación no tienen restricciones ya que son válidas para cualquier número real; pero la raíz cuadrada sí presenta una condición a cumplir, y es que el radicando (la expresión que se encuentra dentro de la raíz) no puede ser negativo. Es decir que la condición que debe cumplirse es:

$$2x^2 - 2 \geq 0$$

Resolver esa inecuación nos dará el conjunto correspondiente al dominio de la función.

$$2x^2 - 2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| \geq 1$$

Aplicando las propiedades de valor absoluto:

$$|x| \geq 1$$

$$x \geq 1 \quad o \quad x \leq -1$$

Por lo tanto: $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty) \quad \Longrightarrow \quad Dom\, f(x) = (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$

Conjunto Imagen de $f(x)$:

El conjunto imagen de una función es el conjunto de valores que puede tomar la función. Para su determinación debemos analizar qué resultados puedo obtener en las distintas operaciones que aparecen en su fórmula.

En el caso de f(x), la expresión $\sqrt{2x^2 - 2}$ será un valor mayor o igual a 0 (no puede ser negativo); si multiplicamos por 2 cualquier resultado, también obtendremos un número mayor o igual a 0. Si luego se suma 1 a ese resultado, los valores posibles de la función serán mayores o iguales a 1.

Es decir: $\boldsymbol{Im\, f(x) = [1;+\infty)}$

2. Hallar la ecuación de la recta que tiene ordenada al origen 3 y es paralela a la recta de ecuación $\boldsymbol{y = x + \frac{3}{2}}$

- **Para la realización de este ejercicio recomendamos ver el material teórico correspondiente a la materia. Será de utilidad ver el siguiente apunte: "función lineal" – Unidad 2.**

La recta que debemos hallar tiene por ecuación a la expresión $y = ax + b$, donde a es la pendiente y b la ordenada al origen.

La recta buscada es paralela a la recta $\boldsymbol{y = x + \frac{3}{2}}$**,** para obtener su pendiente tenemos en cuenta que si dos rectas son paralelas sus pendientes son iguales.

Entonces la pendiente de la recta buscada es 1.

Como la ordenada al origen es 3, podemos reemplazar en la ecuación.

Finalmente la ecuación buscada es $y = x + 3$.

3. Hallar la función cuadrática $g(x)$ cuyo gráfico tiene vértice en el punto $V = (1; -8)$ y que además verifica

que $g(3) = -6$.

- **Para la realización de este ejercicio recomendamos ver el material teórico correspondiente a la materia. Será de utilidad ver los siguientes apuntes: "Función cuadrática" – Unidad 2.**

En este ejercicio como conocemos las coordenadas del vértice $\boldsymbol{V} = (\mathbf{1}; -\mathbf{8})$ nos conviene utilizar la expresión canónica:

$$g(x) = a(x - x_v)^2 + y_v \quad , \quad Con\ a \neq 0$$

Reemplazando en ella obtenemos: $g(x) = a(x-1)^2 - 8$.

Para hallar dicha función, debemos hallar el valor de a.

Como $\boldsymbol{g(3) = -6}$ **,** podemos decir que el punto $(\mathbf{3}, -\mathbf{6})$ pertenece a la gráfica de la función cuadrática, entonces podemos reemplazarlo en la ecuación:

$-6 = a(3-1)^2 - 8$

$-6 + 8 = a(2)^2$ Sumando miembro a miembro 8, y resolviendo el paréntesis

$2 = 4a$

$a = \frac{2}{4}$ Dividiendo ambos miembros por 4.

$a = \frac{1}{2}$

Con lo cual la expresión nos queda:

$$g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 8$$

4. Dado el punto $\boldsymbol{Q = (1; 2)}$, hallar todos los puntos de la forma $\boldsymbol{P = (a; a + 2)}$ tales que la distancia entre $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ sea $\boldsymbol{\sqrt{5}}$.

- **Para la realización de este ejercicio recomendamos ver el material teórico correspondiente a la materia. Será de utilidad ver los siguientes apuntes: "Distancia entre puntos" - Unidad 1, "Polinomios" (Repaso de cuadrado de un binomio), "Función cuadrática" (Repaso de fórmula resolvente) – Unidad 2.**

Para hallar dichos puntos, es necesario utilizar la fórmula de distancia entre dos puntos:

$d(A; B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Planteamos la distancia entre los puntos *P* y *Q* y resolvemos la ecuación que se obtiene:

$d(P; Q) = \sqrt{(a - 1)^2 + (a + 2 - 2)^2}$

$\sqrt{5} = \sqrt{(a - 1)^2 + (a)^2}$

$\sqrt{5} = \sqrt{a^2 - 2a + (-1)^2 + a^2}$

$\sqrt{5} = \sqrt{2a^2 - 2a + 1}$ Como ambos miembros de la igualdad se ven afectados por una raíz cuadrada, sus radicandos deben ser iguales.

$5 = 2a^2 - 2a + 1$

$0 = 2a^2 - 2a - 4$ Luego, aplicando la fórmula resolvente, es posible hallar los valores de a:

$a = 2$ y $a =$ -1

Por lo tanto, como $P = (a; a + 2)$, reemplazando ambos valores encontrados, en el punto, obtendremos que:

$P_1 = (2; 4) \;\; y \;\; P_2 = (-1\,; 1)$