APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	**2**	**3**	**4**
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40’. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Hallar, en caso de existir, los puntos máximos y mínimos de la función $f(x) = (x^2 - 1)^2$ Justificar si los puntos hallados son máximos, mínimos.

La función está definida para todo número real, por lo tanto, $Dom_f = \mathbb{R}$.

Derivamos la función:

$$f'(x) = 2.(x^2 - 1).2x$$

$$f'(x) = 4x\,.(x^2 - 1)$$

El dominio de la derivada es también el conjunto de los números reales.

Igualamos la derivada a cero para hallar los puntos críticos

$$f'(x) = 0$$

$$4x.(x^2 - 1) = 0$$

$$4x = 0 \quad o \quad x^2 - 1 = 0$$

$$x = \frac{0}{4} \quad o \quad x^2 = 1$$

$$x = 0 \quad o \quad |x| = \sqrt{1}$$

$$x = 0 \quad o \quad x = 1 \quad o \quad x = -1$$

Puntos críticos = $\{-1; 0; 1\}$

Vamos a usar el criterio de la segunda derivada para decidir si en alguno de ellos, hay un extremo de la función.

Aplicando la propiedad distributiva: $f'(x) = 4x^3 - 4x$

Luego, derivamos:

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

Y la evaluamos en los puntos críticos:

$$f''(-1) = 12.(-1)^2 - 4$$

$$f''(-1) = 8$$

Como $f''(-1) > 0$, en $x = -1$ la función alcanza un mínimo relativo.

Mínimo relativo en $\big(-1; f(-1)\big) = (-1; 0)$

$$f''(0) = 12 \,.\, 0^2 - 4$$

$$f''(0) = -4$$

Como $f''(0) < 0$, en $x = 0$ la función alcanza un máximo relativo.

Máximo relativo en $\big(0, f(0)\big) = (0; 1)$

$$f''(1) = 12 \,.\, 1^2 - 4$$

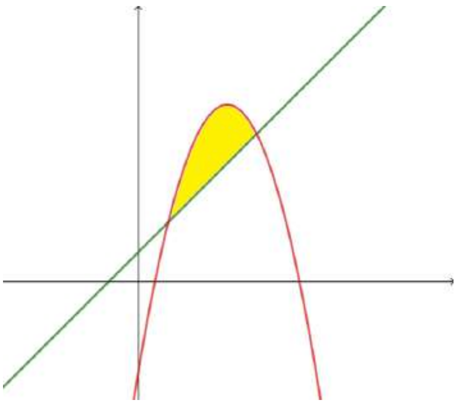
$$f''(1) = 8$$

Como $f''(1) > 0$, en $x = 1$ la función alcanza un mínimo relativo.

Mínimo relativo en $\big(1; f(1)\big) = (1; 0)$

En el apunte de cátedra: "La derivada y el estudio de funciones" podrás encontrar más información sobre este tema.

2. Calcular el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x + 1$, $g(x) = -x^2 + 6x - 3$



Para calcular el área de la región limitada por las gráficas de las funciones indicadas, calculamos la intersección de ambas, igualando las expresiones:

$$x + 1 = -x^2 + 6x - 3$$

$$x^2 + x - 6x + 1 + 3 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Aplicando la fórmula resolvente, con $a = 1, b = -5, c = 4$:

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.4}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$x_1 = \frac{8}{2} \Rightarrow x_1 = 4$ y $x_2 = \frac{2}{2} \Rightarrow x_2 = 1$

Luego, en el intervalo $[1; 4]$ la parábola queda por encima de la recta.

Por lo que el área es:

$$A = \int_1^4 [(-x^2 + 6x - 3) - (x + 1)]\, dx$$

$$A = \int_1^4 [-x^2 + 6x - 3 - x - 1)]\, dx$$

$$A = \int_1^4 [-x^2 + 5x - 4)]\, dx$$

$$A = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right)\begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix}$$

$$A = \left(-\frac{4^3}{3} + \frac{5.4^2}{2} - 4.4\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{5.1^2}{2} - 4.1\right)$$

$$A = \frac{8}{3} - \left(-\frac{11}{6}\right)$$

$$A = \frac{9}{2}$$

$$A = 4{,}5$$

En el apunte de cátedra: "Integrales. Cálculo de áreas" podrás encontrar más información sobre este tema.

3. Hallar las coordenadas del punto de la gráfica de la función $h(x) = \ln(2x^2 + x + 1) + 5x$ donde la pendiente de la recta tangente es igual a 5

Teniendo en cuenta que el valor de la derivada de la función dada en un punto nos brinda la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto, hallamos la función derivada:

$$h'(x) = \frac{1}{2x^2 + x + 1} \cdot (4x+1) + 5$$

Deben recordarse las fórmulas de derivación así como también las derivadas de las funciones más importantes (se sugiere repasar el apunte de cátedra correspondiente a la unidad 5, “Derivadas”, desarrollado en la sesión 11). Se ha utilizado la regla de derivación de una suma de funciones, la regla de la cadena y la derivación de la función logaritmo natural entre otras.

En este caso se conoce la pendiente de la recta tangente, luego debe hallarse el valor de x tal que $h'(x) = 5$

Teniendo en cuenta lo anterior, se iguala la función derivada a 5 y se procede a resolver la ecuación:

$$\frac{1}{2x^2 + x + 1} \cdot (4x+1) + 5 = 5$$

Restando 5 en ambos miembros resulta,

$$\frac{1}{2x^2 + x + 1} \cdot (4x+1) = 0$$

Efectuando el producto queda,

$$\frac{4x+1}{2x^2 + x + 1} = 0$$

Para que el cociente sea cero, el dividendo debe ser cero, entonces:

$$4x + 1 = 0$$

Despejando resulta,

$$x = -\frac{1}{4}$$

Se pide el cálculo de las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la función es igual a 5, entonces se calcula el valor que toma la función h dada para el valor de x hallado:

$$h\left(-\frac{1}{4}\right) = \ln\left(2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right) + 1\right) + 5 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

Efectuando los cálculos resulta,

$$h\left(-\frac{1}{4}\right) = \ln\left(2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 1\right) - \frac{5}{4}$$

$$h\left(-\frac{1}{4}\right)=\ln\left(\frac{7}{8}\right)-\frac{5}{4}$$

En definitiva, el punto P en el cual la recta tangente a la función h tiene pendiente 5 es:

$$P=\left(-\frac{1}{4};\ln\left(\frac{7}{8}\right)-\frac{5}{4}\right)$$

4. Hallar la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f'(x) = \frac{1}{x-3}$ y que $f(4) = 2$. Luego, hallar $f^{-1}(2)$.

Para calcular la función f conociendo su derivada debemos obtener una primitiva de la misma.

Entonces,

$$f(x) = \int \frac{1}{x-3} dx$$

En este caso recurrimos al método de sustitución o cambio de variable (se sugiere repasar el apunte de cátedra correspondiente a la unidad 6, “Integrales”, desarrollado en la sesión 12)

Resulta conveniente realizar la siguiente sustitución:

$$u = x - 3$$

Luego,

$$du = 1dx$$

$$\int \frac{1}{x-3} dx = \int \frac{1}{u} du$$

La integral obtenida en la nueva variable u resulta inmediata y se obtiene de la tabla de integrales.

Entonces,

$$\int \frac{1}{u} du = \ln(u) + C$$

Teniendo en cuenta que:

$$u = x - 3$$

Resulta,

$$\int \frac{1}{x-3} dx = \ln(x-3) + C$$

En definitiva,

$$f(x) = \ln(x-3) + C$$

Para calcular el valor de la constante de integración se considera que $f(4) = 2$

Luego,

$$\ln(4-3) + C = 2$$

$$\ln(1) + C = 2$$

$$0 + C = 2$$

Entonces,

$$C = 2$$

La expresión de la función buscada es:

$$f(x) = \ln(x-3) + 2$$

Para calcular el valor que toma la función inversa de f en x=2 debemos calcular previamente la expresión de tal función inversa. Para ello, escribimos:

$$y = \ln(x-3) + 2$$

Se procede a despejar la variable independiente x:

$$y - 2 = \ln(x-3)$$

Recordando la definición de logaritmo (en este caso se trata del logaritmo natural) queda,

$$x - 3 = e^{y-2}$$

$$x = e^{y-2} + 3$$

Permutando las variables, resulta:

$$y = e^{x-2} + 3$$

Efectivamente,

$$f^{-1}(x) = e^{x-2} + 3$$

Para finalizar el ejercicio se hace x = 2 para calcular su imagen a través de la función inversa de f:

$$f^{-1}(2) = e^{2-2} + 3$$

$$f^{-1}(2) = e^{0} + 3$$

$$f^{-1}(2) = 1 + 3$$

$$f^{-1}(2) = 4$$