APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Hallar $f^{-1}(x)$, $b \in \mathbb{R}$; tal que $f(x) = \frac{2b-x}{-3}$, si: $f(-b) = f^{-1}(b-1)$

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver apuntes de: Función inversa

Para hallar la función inversa de $f(x)$, como nos dan de dato que $f(-b) = f^{-1}(b-1)$, basta con encontrar la imagen de $f(x)$, ya que la misma será el dominio de $f^{-1}(x)$.

Al despejar la "x" de la función f, y realizando un cambio de variables (intercambiamos a cada "y" por "x" y la "x" por "y"), lograremos encontrar dicha función inversa:

$$y = \frac{2b-x}{-3}$$

$$-3y = 2b - x$$

$$-3y - 2b = -x$$

$$x = 3y + 2b$$

Realizando el cambio de variables que mencionamos anteriormente, nos quedará:

$$y = 3x + 2b$$

Es decir que, la función inversa es:

$$f^{-1}(x) = 3x + 2b$$

Como sabemos que $f(-b) = f^{-1}(b-1)$, si evaluamos en cada miembro de la igualdad y luego despejamos, podremos obtener "b" y por lo tanto la función inversa pedida:

$$f^{-1}(b-1) = 3.(b-1) + 2b$$

$$f^{-1}(b-1) = 3b - 3 + 2b$$

$$f^{-1}(b-1) = 5b - 3$$

$$f(-b) = \frac{2b - (-b)}{-3}$$

$$f(-b) = \frac{3b}{-3}$$

$$f(-b) = -b$$

Es decir que:

$f^{-1}(b-1) = f(b)$, entonces $5b - 3 = -b$

$$5b + b = 3$$

$$6b = 3$$

$$b = \frac{1}{2}$$

Reemplazando en $f^{-1}(x) = 3x + 2b$, resultará:

$$f^{-1}(x) = 3x + 2\,.\,\frac{1}{2}$$

$$f^{-1}(x) = 3x + 1$$

2. Hallar el conjunto de positividad de la función $f(x) = \frac{-2}{x^2+1} + 1$

Solución:

Para resolver esta actividad se trabajarán los siguientes contenidos abordados durante el cuatrimestre: Números Reales- Ecuaciones e inecuaciones- intervalo- Funciones- Funciones cuadráticas- Funciones polinómicas -Estudio de una función.

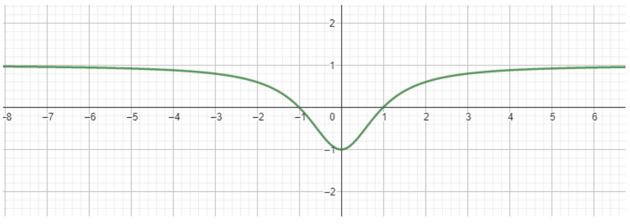
Antes de comenzar con el análisis de la función vamos a determinar el dominio de la misma, para ello debemos recordar que las funciones racionales tienen como puntos restringidos aquellos valores que anulan el denominador, por lo tanto:

$$x^2 + 1 \neq 0$$

$$x^2 \neq -1 \quad x \notin R$$

De la expresión anterior determinamos: $Dom\ f = R$

Para determinar los conjuntos de positividad de la función debemos analizar su comportamiento y recordar que se denomina conjunto de positividad de la función al conjunto de valores del dominio para los cuales la función es positiva.



$f(x) = \frac{-2}{x^2+1} + 1$

En la gráfica de la función $f(x)$ se puede observar que las dos raíces de la función son el punto

$(-1; 0)\ y\ (1; 0)$. Por lo tanto, utilizando la definición de conjunto de positividad se deduce:

$$\frac{-2}{x^2+1} + 1 > 0$$

$$\frac{-2}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x^2+1} > 0$$

$$\frac{-2 + x^2 + 1}{x^2+1} > 0$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2+1} > 0$$

Recordemos que el cociente de dos expresiones es mayor a cero sí ambas expresiones son positivas o ambas negativas, es decir que el numerador es mayor a cero y el denominador es mayor a cero, o viceversa.

Opción 1: +/+

$$x^2 - 1 > 0 \qquad \wedge \qquad x^2 + 1 > 0 \ \rightarrow \ x^2 > -1$$

$|x| > 1$ El conjunto de números Reales

Pues una expresión elevada al cuadrado va dar por resultado un número positivo y este es mayor a -1.

De la expresión anterior se deduce:

$$|x| > 1 \quad \rightarrow \quad x > 1 \quad \vee \; x < -1 \;\; Solución\ 1 = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

Opción 2: -/-

$$x^2 - 1 < 0 \qquad \wedge \qquad x^2 + 1 < 0 \rightarrow x^2 < -1$$

$|x| > 1$ (Conjunto vacío)

Pues una expresión elevada al cuadrado va dar por resultado un número positivo y este nunca es menor a -1.

De la expresión anterior se deduce:

$$|x| > 1 \quad \rightarrow \quad x > 1 \quad \vee \; x < -1$$

$$Solución\ 2 = (-1; 1) \cap \emptyset = \{\emptyset\}$$

Por lo tanto, el conjunto de positividad es la solución 1

$$C^+ = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

3. Hallar el valor de $c \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = -x^2 + x + c$ tenga un único punto de intersección con la función $g(x) = 5x + 2$

Para hallar los puntos en de intersección de las funciones debemos plantear:

$$f(x) = g(x)$$

Luego, reemplazamos por las fórmulas de las funciones dadas en el enunciado y resulta que:

$$-x^2 + x + c = 5x + 2$$

Despejamos y obtenemos que:

$$-x^2 - 4x + c - 2 = 0$$

Aplicamos la fórmula resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.(-1).(c-2)}}{-2}$$

Resolvemos y resulta:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4.(c-2)}}{-2}$$

Como las funciones deben intersecarse en un punto, la ecuación debe tener una única solución por lo que $16 + 4.(c-2)$ debe ser cero, es decir:

$$16 + 4.(c-2) = 0$$

Despejamos

$$4.(c-2) = -16$$

$$c - 2 = -4$$

Entonces:

$$c = -2$$

Al resolver el ejercicio utilizamos los conceptos de función lineal, función cuadrática y de ecuaciones cuadráticas.

4. Hallar el valor de k para que la función $f(x) = \frac{3-2x}{kx-5}$ tenga una asíntota en $y = \frac{1}{4}$.

Si la recta $y = \frac{1}{4}$ es asíntota de la función significa que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{4} \implies \lim_{x\to\infty} \frac{3-2x}{kx-5} = \frac{1}{4}$$

Al evaluar numerador y denominador nos encontramos que ambos tienden a ∞ , por lo tanto se presenta una indeterminación que debemos resolver; para ello dividimos numerador y denominador por x :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3-2x}{x}}{\frac{kx-5}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}-2}{k-\frac{5}{x}}$$

En esta expresión $\frac{3}{x}$ y $\frac{5}{x}$ se aproximan a 0 , por lo tanto el numerador tiende a -2 y el denominador se aproxima a k . Entonces:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3-2x}{kx-5} = -\frac{2}{k}$$

Si $-\frac{2}{k} = \frac{1}{4} \implies k = -8$