B ÁLGEBRA (27) 2^{do} PARCIAL 2^{do} CUATRIMESTRE de 2022 | Tema 1 |

APELLIDO [redacted]........ NOMBRES [redacted]... DNI [redacted]

INSCRIPTO EN: | SEDE: CIUU 02 | DIAS: M.M.J | HORARIO: 10-13 | AULA: 213 |

| NOTA del 1^{er} parcial: 10 |

1	2	3	4	NOTA
B	B⁻	B	B	9 (nueve)

PROMOCIONA	RECUPERA
10 (diez)	23/11/22 - 10 hs
INSUFICIENTE	FINAL

CORRECTOR: Cen..

Los razonamientos usados para la resolución de los problemas deben figurar en la hoja.

1.- Sean en $\mathbb{R}^3$ los subespacios $\mathbb{S} = \langle (1,3,0), (0,2,1) \rangle$, $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, 3x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $\mathbb{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_3 = 0\}$. Definir, si es posible, una transformación lineal $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique simultáneamente

$$f(\mathbb{S}) = \mathbb{S}, \quad f(\mathbb{T}) = \mathbb{T}, \quad f(1,3,0) \in \mathbb{H} \quad \text{y} \quad f(0,1,-1) \in \mathbb{H}.$$

2.- Sean $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$, $B = \{(1,0,1); (0,1,0); (1,0,0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$M_{EB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a & 4 \\ -1 & 3 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen que f sea un isomorfismo y $f(4, a, -2) \in \mathbb{S}$.

3.- Hallar $P \in \mathbb{R}[X]$ de grado mínimo entre todos los polinomios que verifican simultáneamente:

- todas las soluciones de $\bar{z}z^3 = 27iz$ son raíces de P,
- P tiene alguna raíz doble,
- $P(1) = 50$.

4.- Sea $A = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 0 \\ -10 & 8 & 0 \\ -10 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Hallar, si es posible, una matriz inversible C y una matriz diagonal D tales que $A = CDC^{-1}$.

1

① $S = \langle (1,3,0), (0,2,1) \rangle$

$T = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$

$H = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 0 \}$

$f \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Datos

$f(S) = S$

$f(T) = T$

$f(1,3,0) \in H$

$f(0,1,-1) \in H$

- Busco generadores de T

$3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \iff x_2 = -x_3 - 3x_1$

$T = \langle (1,-3,0), (0,1,-1) \rangle$

$$f(\underbrace{1,3,0}_{\in S}) = (\underbrace{\quad\quad}_{\in S,\ \in H\ \}\ S\cap H})$$

$$f(\underbrace{0,1,-1}_{\in T}) = (\underbrace{\quad\quad}_{\in T,\ \in H\ \}\ T\cap H})$$

$$f(\underbrace{\quad}_{S\cap T}) = (\underbrace{\quad\quad}_{S\cap T})$$

- Busco $S \cap H$

$X_S = (\alpha,\ 3\alpha + 2B,\ B)$

reemplazo X_S en H

$\alpha + B = 0$

$\boxed{\alpha = -B}$ $\Rightarrow$ reemplazo $\alpha = -B$ en X_S

$X_S = (-B,\ -3B + 2B,\ B)$

$(-B,\ -B,\ B)$

$S \cap H = \langle (-1, -1, 1) \rangle$

②

• BUSCO $T \cap H$

$\bar{X}_T = (\alpha, -3\alpha + \beta, -\beta)$

reemplazo $\bar{X}_T$ en H.

$\alpha - \beta = 0$

$\boxed{\alpha = \beta} \Rightarrow$ reemplazo $\alpha = \beta$ en $\bar{X}_T$

$\bar{X}_T = (\beta, -3\beta + \beta, -\beta)$

$= (\beta, -2\beta, -\beta)$

$T \cap H = \langle (1, -2, -1) \rangle$

• BUSCO $S \cap T$

$\bar{X}_S = (\alpha, 3\alpha + 2\beta, \beta)$

reemplazo $\bar{X}_S$ en T.

$3\alpha + 3\alpha + 2\beta + \beta = 0$

$6\alpha + 3\beta = 0$

$3\beta = -6\alpha$

$\boxed{\beta = -2\alpha} \Rightarrow$ reemplazo $\beta = -2\alpha$ en $\bar{X}_S$

$\overline{x}_S = (\alpha, 3\alpha - 4\alpha, -2\alpha)$

$(\alpha, -\alpha, -2\alpha)$

$\boxed{S \cap T = \langle (1,-1,-2) \rangle}$

• Propongo la siguiente TL $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(1,3,0) = (-1,-1,1)$

$f(0,1,-1) = (1,-2,-1)$

$f(1,-1,-2) = (1,-1,-2)$

• Observo si $\{(1,3,0), (0,1,-1), (1,-1,-2)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$

• Veo la linealidad del conjunto de vectores

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} F3 - F1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} F3 + 4F2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{SON LI}$$

3

RTA

$f(1,3,0) = (-1,-1,1)$

$f(0,1,-1) = (1,-2,-1)$

$f(1,-2,-2) = (1,-1,-2)$

(2) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$

$B = \{(1,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$

$M_{EB}(f)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a & 4 \\ -1 & 3 & a-1 \end{pmatrix}$

$f(4, a, -2) \in S$

• Parto de la siguiente idea

$M_{EB}(f) \cdot (v)_E = (f(v))_B$

$[M_{EB}(f) \cdot (4, a, -2)^t] = (f(v))_B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a & 4 \\ -1 & 3 & a-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ a^2 \\ a-2 \end{pmatrix}$$

$(4, a^2, a-2) = (f(4, a, -2))_B$

$f(4, a, -2) = 4 \cdot (1, 0, 1) + a^2 \cdot (0, 1, 0) +$

$(a-2) \cdot (1, 0, 0)$

$f(4, a, -2) = (4, 0, 4) + (0, a^2, 0) +$

$(a-2, 0, 0)$

$= \boxed{(2+a, a^2, 4)}$

• $(2+a, a^2, 4)$ debe pertenecer a S.
lo reemplazo en S

$2 + a + a^2 - 8 = 0$

$-6 + a + a^2 = 0$

• Utilizo la formula resolvente y hallo a.

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} \quad \frac{-1+5}{2} = 3 \quad -2$$

$$\frac{-1-5}{2} = 2 \quad -3$$

③

$$\bar{z}\, z^3 = 27 i z$$

Forma trigonométrica:

- $\bar{z} = |z| \cdot (\cos(-\alpha) + i\,\mathrm{sen}(-\alpha))$ si $z \neq 0$

- $z^3 = |z|^3 \cdot (\cos(3\alpha) + i\,\mathrm{sen}(3\alpha))$

- $27i = 27 \cdot (\cos(\overset{\pi/2}{\cancel{0}}) + i\,\mathrm{sen}(\overset{\pi/2}{\cancel{0}}))$

(*) $\frac{27}{27} = 1$ $\qquad \underbrace{\overset{\mathrm{sen}}{\cancel{\cos}}(\alpha) = 1}_{\frac{\pi}{2}}$

- $z = |z| \cdot (\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))$

- $\bar{z} \cdot z^3 = |z| \cdot |z|^3 \cdot (\cos(-\alpha + 3\alpha) + i\,\mathrm{sen}(-\alpha+3\alpha))$

$$= \boxed{|z|^4 (\cos(2\alpha) + i\,\mathrm{sen}(2\alpha))}$$

- $27 i z = 27 \cdot |z| \cdot (\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2} + \alpha))$

$$= \boxed{27 \cdot |z| \; (\cos(\tfrac{\pi}{2} + \alpha) + i\,\mathrm{sen}(\tfrac{\pi}{2}+\alpha))}$$

$\bar{z} \cdot z^3 = 27 i z \iff ① \; |\bar{z} \cdot z^3| = |27 i z|$

$\iff ② \; \arg(\bar{z} \cdot z^3) = \arg(27 i z)$

①

$|z|^4 = 27 \cdot |z|$

$|z|^3 = 27$

$|z| = \sqrt[3]{27}$

$\boxed{|z| = 3}$ (si $z \neq 0$)

②

$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha + 2k\pi$

$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$

- Hallo $k \in \mathbb{Z}$

$0 \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2\pi$

$0 \leq \left(\frac{1}{2} + 2k\right) \cdot \pi < 2\pi$

$0 \leq \frac{1}{2} + 2k < 2$

$-\frac{1}{2} \leq 2k < \frac{3}{2}$

$-\frac{1}{4} \leq k < \frac{3}{4}$

$\boxed{k \in \{0\}}$

$K=0 \qquad z = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$

$z = 3 \cdot (0 + i \cdot 1)$

$\underbrace{\boxed{z = 3i} \quad y \quad \boxed{z = 0}}$

Soluciones de $\bar{z} \cdot z^2 = 27i \cdot z$

• Raíces de $P = \{3i, -3i, 0\}$
↳ multiplicidad doble (elegí que sea así para que P sea de grado mínimo)

$P = a \cdot (x - 3i) \cdot (x + 3i) \cdot x^2$

$P = a \cdot (x^2 + 9) \cdot x^2$

• Hallo a con el dato $P(1) = 50$

$50 = a \cdot (1 + 9) \cdot 1$

$50 = 10a$

$\boxed{5 = a}$

$\boxed{\text{Rta} = 5 \cdot (x^2 + 9) \cdot x^2}$

(8)

(4)

$$M \Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 0 \\ -10 & 8 & 0 \\ -10 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M^f_{EE} = C_{BE} \cdot M^f_B \cdot C_{EB}$$

$$A = C \cdot D \cdot C^{-1}$$

- HAllo $M_B = (D)$

- BUSCO AUTOVALORES de A. Para ello hallo las raíces del polinomio característico asociado a la matriz A.

$$P(\lambda) = \det |A - \lambda I|$$

$$= \det \begin{vmatrix} -7-\lambda & 5 & 0 \\ -10 & 8-\lambda & 0 \\ -10 & 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{por columna } 3^{a}}{=}$$

$$1.\ 3-\lambda \cdot \begin{bmatrix} -7-\lambda & 5 \\ -10 & 8-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda) \cdot [(-7-\lambda) \cdot (8-\lambda) + 50]$$

$$(3-\alpha)\cdot\left[(-7-\alpha)\cdot(8-\alpha)+50\right]$$

$$(3-\alpha)\cdot\left[-56+7\alpha-8\alpha+\alpha^2+50\right]$$

$$(3-\alpha)\cdot\underbrace{\left[-6-\alpha+\alpha^2\right]}=0$$

$$\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot-6}}{2}$$

$$\frac{1+5}{2}=3 \qquad \frac{1-5}{2}=-2$$

$$\boxed{\underline{\text{AUTOVALORES}} = \left\{3\ (\text{multiplicidad doble}),\ -2\right\}}$$

- Busco los subespacios asociados para cada autovalor

$$S_{\alpha=3}=\left\{x\in\mathbb{R}^3:(A-3I)\cdot x=0\right\}$$

$$\begin{pmatrix}-10 & 5 & 0\\ -10 & 5 & 0\\ -10 & 5 & 0\end{pmatrix}\cdot X=0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -10 & 50 & 0 \\ -10 & 50 & 0 \\ -10 & 50 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} F2-F1 \\ F3-F1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -10 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} -10x_1 + 5x_2 = 0 \\ 5x_2 = 10x_1 \\ \boxed{x_2 = 2x_1} \end{cases}$$

$$S_{\alpha=3} = \langle (1,2,0),(0,0,1) \rangle$$

$$S_{\alpha=-2} = \{ x \in \mathbb{R}^3 : (A+2I) \cdot x = 0 \}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ -10 & 10 & 0 \\ -10 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 5 & 0 & 0 \\ -10 & 10 & 0 & 0 \\ -10 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} F2-2F1 \\ F3-2F1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} -5x_1 + 5x_2 = 0 \\ -5x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 = 5x_2 \iff x_1 = x_2 \\ 5x_2 = 5x_3 \iff x_3 = x_2 \end{cases}$$

$$S_{\lambda=-2} = \langle (1,1,1) \rangle$$

base formada por autovectores de A.

$$B' = \{ (1,1,1), (1,2,0), (0,0,1) \}$$

· observo q son LI.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2-F1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

· Armo $M_{B'} = (D)$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow RTA$$

10

Armo C

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rta.}$$