B ÁLGEBRA (27) 1[er] PARCIAL 2[do] CUATRIMESTRE de 2022 **Tema 4**

APELLIDO [redacted] NOMBRES [redacted] DNI [redacted]

1	2	3	4	NOTA
B	B	B	B-	10 diez

INSCRIPTO EN:

SEDE: C.U. 2	DIAS: MaMiVi
HORARIO: 10-13	AULA: 2-13

CORRECTOR: Sam.

Los razonamientos usados para la resolución de los problemas deben figurar en la hoja.

1.- Sean $\Pi_1 : x - y + z = -4$, $\Pi_2 : -y + 2z = -1$, $\Pi_3 : -3y + 4z = -2$ y $\mathbb{L} = \Pi_1 \cap \Pi_2$. Determinar todos los puntos de $\mathbb{L}$ que están a distancia 1 del plano Π_3.

2.- Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Si $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = 2\mathbf{b}$, hallar una solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ que pertenezca al plano $\Pi : x_1 + x_3 = 9$.

3.- Sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 = 0; x_2 + x_4 = 0\} \quad \text{y} \quad \mathbb{T} = \langle (1,3,2,-1), (2,1,1,-3) \rangle.$$

Hallar un subespacio $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^4$ que cumpla simultáneamente:

$$\mathbb{S} \oplus \mathbb{W} = \mathbb{S} + \mathbb{T} \quad \text{y} \quad \mathbb{T} \oplus \mathbb{W} = \mathbb{S} + \mathbb{T}.$$

4.- Sea $B = \{(1, a, -1); (b, 1, 2); (0, -2, c)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Hallar a, b, $c \in \mathbb{R}$ de manera que las coordenadas del vector $(4, -3, -3)$ en la base B sean $(2, 1, 3)$.

①

① $\Pi_1: x - y + z = -4$

$\Pi_2: -y + 2z = -1$

$\Pi_3: -3y + 4z = -2$

$L = \Pi_1 \cap \Pi_2$

Determinar todos los puntos de L que estan a distancia 1 del plano Π_3.

$\boxed{\text{Busco } \Pi_1 \cap \Pi_2}$

$$\begin{cases} x - y + z = -4 \\ -y + 2z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -4 - z + 2z + 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 + z \end{cases}$$

- $L: \alpha \cdot (1, 2, 1) + (-3, 1, 0)$

• Hallo todos los puntos de L a distancia 1 del plano π_3.

$\overline{X}L: (\alpha - 3, 2\alpha + 1, \alpha)$

Formula de distancia (reemplazo $\overline{X}L$ ahí)

$$1 = \frac{|(0,-3,4) \cdot (\alpha-3, 2\alpha+1, \alpha) + 2|}{\|(0,-3,4\| \circledast}$$

$$1 = \frac{|(0 - 6\alpha - 3 + 4\alpha + 2|}{5}$$

$\circledast \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 4^2}$

$\sqrt{25}$

$5 = |-2\alpha - 1|$

$-5 = -2\alpha - 1$

$-4 = -2\alpha$

$\boxed{2 = \alpha}$ ✓

$5 = -2\alpha - 1$

$6 = -2\alpha$

$\boxed{-3 = \alpha}$ ✓

- Reemplazo $\alpha = 2$ en $\overline{X}L$

$\overline{X}L : (2-3,\ 2.2+1,\ 2)$

$\overline{X}L : (-1,\ 5,\ 2)$

- Reemplazo $\alpha = -3$ en $\overline{X}L$

$\overline{X}L : (-3-3,\ 2.-3+1,\ -3)$

$\overline{X}L : (-6,\ -5,\ -3)$

Rta: Los puntos de L que estan a distancia 1 del plano π_3 son:

$$\boxed{(-6,-5,-3) \ y \ (-1,5,2)}$$

② $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

$b \neq 0$ si $\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$ solución del sistema $Ax=b$ y $\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$ solución del sistema $AX=2b$. Hallar una solución del sistema $AX=b$ que pertenezca al plano $\pi: x_1+x_3=9$

$A.\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}=b$ $A.\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}=2b$

$A.\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=b$

• Tengo dos soluciones del sistema $Ax=b$ $\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. A partir de ella, puedo crear una recta que contenga soluciones del sistema.

$$L: \alpha\left(\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{L: \alpha.\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}}$$

• Busco una solución de $Ax=b$ que pertenezca al plano $\pi = x_1+x_3=9$

- Busco $L \cap \Pi$.

$\overline{X}L: (2\alpha + 4, \alpha + 3, 1)$

- Reemplazo $\overline{X}L$ en el plano Π:

$$2\alpha + 4 + 1 = 9$$

$$2\alpha = 9 - 5$$

$$2\alpha = 4$$

$$\boxed{\alpha = 2}$$

- Reemplazo $\alpha = 2$ en $\overline{X}L$

$\overline{X}L: (2.2 + 4, 2 + 3, 1) = (8, 5, 1)$

Rta: $\boxed{(8, 5, 1)}$, Solución del sistema $Ax = b$, pertenece al plano $\Pi: x_1 + x_3 = 9$

③ $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$

$T = \langle (1,3,2,-1), (2,1,1,-3) \rangle$

$S \oplus W = S + T$

$T \oplus W = S + T$

Por teorema de la dimensión

$\underbrace{\dim(S+W)}_{\dim(S+T)} = \dim(S) + \dim(W) - \dim(S \cap W)$

$= 2 + \dim(W) - 0$

$\boxed{\text{Busco } \dim(S+T)}$

• Busco generadores de S.

$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_4 \end{cases}$

$S = \langle (1,0,1,0), (0,-1,0,1) \rangle$

• Busco S + T

$S + T = \langle (1,0,1,0), (0,-1,0,1), (1,3,2,-1), (2,1,1,-3) \rangle$

(4)

• Observo la dependencia lineal del conjunto de vectores generadores de S+T:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F3-F1 \\ F4-2F1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} F3+3F2 \\ F4+F2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} F4+F3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ El conjunto de vectores es LD (linealmente dependiente)

• $S+T = \langle (1,0,1,0),(0,-1,0,1),(1,3,2,-1) \rangle$

• Retomo el teorema de la dimensión

$$\underbrace{\dim(S+W)} = \dim(S) + \dim(W) - \dim(S \cap W)$$

$$\dim(S+T) = 2 + \dim(W) - 0$$

$$3 = 2 + \dim(W)$$

$$\boxed{1 = \dim(W)}$$ ✓

$S \oplus W = S+T \longrightarrow \dim(S+W) = \dim(S+T)$

$\longrightarrow S \subset (S+T)$

$\longrightarrow \underline{W \subset (S+T)}$ ✓

$T \oplus W = S+T \longrightarrow \dim(T+W) = \dim(S+T)$

$\longrightarrow T \subset (S+T)$

$\longrightarrow \underline{W \subset (S+T)}$ ✓

$\underline{W} = \langle \underbrace{(v)}_{\in\, \subset\, S+T} \rangle$

$\left.\begin{array}{l} \notin S \\ \notin T \end{array}\right\}$ esto debe suceder para que $S \cap W$ y $T \cap W$ sean $\{0\}$ ✓ (como lo dice el enunciado) y estén en suma directa.

• Busco un vector $\in S+T$ ($\notin T$ y $\notin S$)

Por ejemplo $= (1,0,1,0) + (1,3,2,-1)$

$$= (2,3,3,-1)$$

• Propongo $W = \langle (2,3,3,-1) \rangle$

• Observo si se cumple lo pedido

① $S \oplus W = S+T \Rightarrow \dim(S+T) = \dim(S+W)$

• Hallo $S+W$

$S+W = \langle (2,3,3,-1), (1,0,1,0), (0,-1,0,1) \rangle$

• Observo la Dependencia lineal del conjunto de vectores de $S+W$.
generadores

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} 2F2 - F1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} 3F3 - F2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\text{Son}}_{\text{están en suma directa y } S \cap W = \{0\}} \text{ LI (linealmente independiente)}$$

• $\dim(S+T) = \dim(S+W)$

$3 = 3$ ✓

• $S \subset S+T$ ✓

$W \subset S+T$ ✓ → $S+W \subset S+T$

→ $S+T = S+W$

② $T \oplus W = S+T \Rightarrow \dim(S+T) = \dim(T+W)$

• Hallo $T+W$

$T+W = \langle (1,3,2,-1), (2,1,1,-3), (2,3,3,-1) \rangle$

• Observo la dependencia lineal del conjunto de vectores generadores de $T+W$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F2 - 2F1 \\ F3 - 2F1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} 5F3 - 3F2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ El conjunto es LI (linealmente independiente)

Están en suma directa y $T \cap W = \{0\}$

⑥

- $\dim (S+T) = \dim (T+W)$

$3 = 3$ ✓

- $T \subset S+T$ ✓
- $W \subset S+T$ ✓

$\boxed{\text{Rta} = \quad W = \langle (2,3,3,-1) \rangle}$

⑨ $B = \{(1, a, -1), (b, 1, 2), (0, -2, c)\}$

$(4, -3, -3)_B = (2, 1, 3)$

$(4, -3, -3) = 2 \cdot (1, a, -1) + 1 \cdot (b, 1, 2) + 3 \cdot (0, -2, c)$

$= (2, 2a, -2) + (b, 1, 2) + (0, -6, 3c)$

$= (2 + b, 2a + 1 - 6, -2 + 2 + 3c)$

$(4, -3, -3) = (2 + b, 2a - 5, 3c)$

$$\begin{cases} 4 = 2 + b \\ -3 = 2a - 5 \\ -3 = 3c \end{cases} \qquad \begin{cases} 4 - 2 = b \iff \boxed{b = 2} \\ -3 + 5 = 2a \iff 2 = 2a \iff \boxed{a = 1} \\ \boxed{-1 = c} \end{cases}$$

$B = \{(1, 1, -1), (2, 1, 2), (0, -2, -1)\}$

• Observo si se cumple:

$(4, -3, -3)_B = (2, 1, 3)$

7

$(4,-3,-3) = 2.(1,1,-1) + 1.(2,1,2) + 3.(0,-2,-1)$

$= (2,2,-2) + (2,1,2) + (0,-6,-3)$

$(4,-3,-3) = (4,-3,-3)$

cumple

falta ver que B es base de $\mathbb{R}^3$

Rta $a = 1$

$b = 2$

$c = -1$