1.- Sean $\mathbb{L}$: $X = \lambda(2,-1,-2)+(-6,1,1)$ y Π el plano que pasa por el punto $A = (-6,1,1)$ y es perpendicular a la recta $X = \lambda(-1,-2,1)$. Hallar dos puntos B y C tales que el triángulo ABC es rectángulo en C, la hipotenusa AB está contenida en $\mathbb{L}$ y tiene longitud 9, y el cateto AC está contenido en Π.

2.- Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, $\mathbf{b} \neq 0$. Sabiendo que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ es una solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ es una solución del sistema $A\mathbf{x} = 2\mathbf{b}$. hallar α y β en $\mathbb{R}$ tales que $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$ sea una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

3.- Sean $\mathbb{H}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + kx_3 + 2x_4 = 0\}$, $\mathbb{H}_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$ y $\mathbb{S} = \langle(1,2,-1,0),(1,1,-2,1)\rangle$. Hallar $k \in \mathbb{R}$ y un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^4$ tales que

$$\mathbb{H}_1^{\perp} \oplus \mathbb{T} = \mathbb{H}_2 \quad \text{y} \quad \mathbb{S} \cap \mathbb{T} \neq \{0\}.$$

4.- Sean $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$ y $B = \{(2,2,-1);(2,5,-2);(-1,-2,2)\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Hallar todos los $\mathbf{v} \in \mathbb{S}$ que tienen las mismas coordenadas en la base B y en la base canónica.

1) $\underset{3\times3}{A}\,\overset{3\times1}{\bar{x}} = \underset{3\times1}{b}$. $\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}$ solución del sistema 1)

2) $A\bar{x} = 2b$ $\begin{pmatrix}6\\2\\2\end{pmatrix}$ solución del sistema 2).

$$A\begin{pmatrix}6\\2\\2\end{pmatrix} = 2b. \Rightarrow A\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\2\\2\end{pmatrix} = b.$$

$$A\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = b. \checkmark$$

$$A\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}.$$

Saco factor común A, que es posible porque está del lado izquierdo de ambas soluciones.

$$A\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} - A\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} = \underset{\in\mathbb{R}^{3\times1}}{\vec{0}} \Rightarrow A\left[\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}\right] = \vec{0}.$$

$$A\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix} = \vec{0}.$$

$$A\,\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix} = \vec{0}.$$

multiplico por λ de ambos lados, se mantiene e igualdad. $\checkmark$

Si $A\begin{pmatrix}2\lambda\\\lambda\\-4\lambda\end{pmatrix} = \vec{0}$,

entonces $A\begin{pmatrix}2\lambda\\\lambda\\-4\lambda\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} = b$. $\checkmark$

quiero que $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\-\alpha\end{pmatrix}$ sea solución del sistema.

$$A\begin{pmatrix}2\lambda+1\\\lambda\\-4\lambda+5\end{pmatrix} = b. \checkmark$$

$$\left.\begin{array}{l}2\lambda+1=\alpha\\ \lambda=\beta\\ -4\lambda+5=-\alpha.\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}2\beta+1=\alpha\\ -4\beta+5=-\alpha.\\ -4\beta+5=-(2\beta+1).\\ -2\beta = -4 \quad -6\\ \boxed{\beta=2}\end{array}$$

$$2\cdot2+1=\alpha \qquad \boxed{5=\alpha}$$

Rta:

$\alpha = 5$
$\beta = 2$. $\begin{pmatrix}5\\2\\-5\end{pmatrix}$ es solución de $A\bar{x}=b$.

con error de cuentas

4) $B = \{(2,2,-1)(2,5,-2)(-1,-2,2)\}$ BASE de $\mathbb{R}^3$.

$S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$.

Hallar $v \in S$. con las mismas coordenadas en B que en la base canónica.

$$B_C = \{(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)\}.$$

$$V = a(2,2,-1) + b(2,5,-2) + c(-1,-2,2) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1).$$

$$(2a+2b-c,\ 2a+5b-2c,\ -a-2b+2c) = (a,b,c). \checkmark$$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 2a+2b-c=a. \\ 2)\ 2a+5b-2c=b. \\ 3)\ -a-2b+2c=c. \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1)\ a+2b-c=0. \\ 2)\ 2a+4b-2c=0. \\ 3)\ -a-2b+c=0. \end{array} \rightarrow$$

puedo resolver el sistema de ecuaciones con una matriz.

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$a+2b-c=0. \checkmark$$
$$a+2b = c$$

$\bar{x} = (a,b,c)$

$\bar{x} = (a,b,a+2b) \Rightarrow$ todas las posibles vectores. $T = \langle (1,0,1)(0,1,2) \rangle$.

$\boxed{\text{Busco } T \cap S}$

$$T = a(1,0,1) + b(0,1,2).$$
$$T = (a,b,a+2b).$$

$S = x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$

$$a+b+2(a+2b)=0.$$
$$a+b+2a+4b=0$$
$$3a+5b=0.$$
$$a = -\frac{5}{3}b$$

$$x = \left(-\frac{5}{3}b,\ b,\ -\frac{5}{3}b+2b\right)$$
$$\bar{x} = \left(-\frac{5}{3}b,\ b,\ \frac{1}{3}b\right).$$
$$\bar{x} = b\left(-\frac{5}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$$
$$\boxed{v = b\left(-\frac{5}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)}. \checkmark$$

Rta: todos los $v \in S$ son los que cumplen con $v = b\left(-\frac{5}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$.

3) $H_1 = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + t x_3 + 2x_4 = 0\}$. $\dim(H_1) = 3$.

$H_2 = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$. $\dim(H_2) = 3$.

$S = \langle (1,2,-1,0)(1,1,-2,1)\rangle$. $\dim(S) = 2$.

$H_1^\perp = \langle (1, 0, t, 2)\rangle$. $\dim(H^\perp) = 1$.

1) $\underbrace{H_1^\perp}_{\dim(H)^\perp = 1} \oplus T = H_2$. $\dim(H_2) = 3$.

$\dim(T) = 2$.

$T \subseteq H_2$.

$H_1^\perp \subseteq H_2$.

2) $\boxed{\in S \cap T}$

$T = \langle \underbrace{\underbrace{t_1}_{\in S}, T_2}_{\in H_2} \rangle$.

Busco generadores de H_2.

$x_1 = 2x_2 + x_3 - x_4$.

$(2x_2 + x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4)$.

$H_2 = \langle (2,1,0,0)(1,0,1,0)(-1,0,0,1)\rangle$.

$\boxed{\text{Busco } S \cap H_2}$ (para encontrar t_1).

$H_2: \; x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0.$

$S = \langle (1,2,-1,0)(1,1,-2,1)\rangle$.

$\bar{x} = \alpha(1,2,-1,0) + \beta(1,1,-2,1)$.

$\bar{x} = (\alpha+\beta, 2\alpha+\beta, -\alpha-2\beta, \beta)$.

$\alpha+\beta - 2(2\alpha+\beta) - (-\alpha-2\beta) + \beta = 0.$

$\alpha+\beta - 4\alpha - 2\beta + \alpha + 2\beta + \beta = 0.$

$2\beta - 2\alpha = 0.$

$\beta = \alpha.$

$S \cap H_2 = \langle \underbrace{(2,3,-3,1)}_{\substack{\in S \\ \in H}} \rangle$.

$\bar{x} = (\beta+\beta, 2\cdot\beta+\beta, -\beta-2\beta, \beta)$.

$\bar{x} = (2\beta, 3\beta, -3\beta, \beta)$.

$T = \langle (2,3,-3,1)\,(t_2) \rangle$

porque $H_1^{\perp} \subset H_2$.

podrías pedir que $(1,0,k,2) \in H_2$.

$\boxed{\text{Busco } H_1^{\perp} \cap H_2}$

(No es sistema).

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[v_1-v_3]{F_1-F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & k-1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

v_4+v_3.

$$\xrightarrow{F_2-2F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & k-1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que exista la intersección, me tendría que quedar una fila de 0, lo que implicaría que existen vectores que son múltiplos.

Entonces, $k-1=2$, para que pueda hacer F_1-2F_4, y desaparezca una fila entera.

$\bar{0} = v_1 - v_3 - 2(v_4+v_3)$.

$v_1 = \underbrace{-v_3 \cdot 2(v_4+v_3)}_{v_3,\, v_4 \text{ son múltiplos de } v_1}$.

$k-1=2$

$\boxed{k=3}$

$(1,0,3,2) \in H_2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1-2F_4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Qué vector me falta para ... que $T \oplus H_1^{\perp} = H_2$?

para formar todo H_2, tomo el vector que no es múltiplo de $H_1^{\perp}$.

$T = \langle (2,3,-3,1)\,(2,1,0,0) \rangle$.

(No es sistema).

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2-f_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1-2F_3} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -9 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_2+2F_1}$$

$$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{son LI}}$$

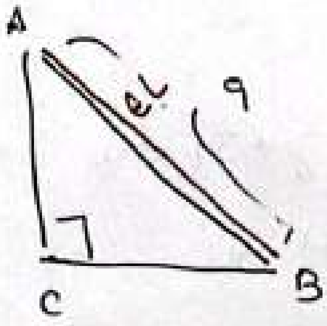
rta. = $k = 3.$

$T = \langle (2,3,-3,1)\ (2,1,0,0) \rangle.$

1) $L: \bar{x} = \lambda(2,-1,-2) + (-6,1,1).$

π: $A \subset \pi$, $A = (-6,1,1).$

$\pi \perp L'$, $L': \bar{x} = \lambda(-1,-2,1).$



$\|AB\| = 9.$

$\overline{AB} \subseteq L.$ $\quad \overline{AC} \perp \overline{CB}.$

$\overline{AC} \subseteq \pi$

π: $N_\pi \parallel V_{DL'}.$

$\pi: N \cdot x = N \cdot Q.$

$-x - 2y + z = (-1,-2,1)(-6,1,1).$

$-x - 2y + z = 5$

$\overline{AC} \perp \overline{CB}.$ $\quad \overline{AC} \cdot \overline{CB} = 0.$

$L: \bar{x} = \lambda(2,-1,-2) + (-6,1,1).$

$\|AB\| = 9. \rightarrow \quad \bar{x} = (2\lambda - 6, -\lambda + 1, -2\lambda + 1).$

$\overline{AB} = (2\lambda - 6, -\lambda + 1, -2\lambda + 1) - (-6,1,1).$

$\overline{AB} = (2\lambda, -\lambda, -2\lambda).$

$9 = \sqrt{(2\lambda)^2 + (-\lambda)^2 + (-2\lambda)^2}.$

$81 = 9\lambda^2.$ $\quad B = (2.3 - 6, -3+1, -2.3+1).$

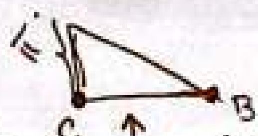
$3 = \lambda.$ $\quad \boxed{B = (0,-2,-5)}.$

o

$-3 = \lambda$

Buscar recta $\perp$ π que contenga a B. (4)

$L'': \bar{x} = \lambda(-1,-2,1) + (0,-2,-5).$



$C = \pi \cap L''.$

recta que contiene a $\overline{CB}$.

Busco la intersección con π.

$\bar{x} = (-\lambda, -2\lambda, \lambda) + (0,-2,-5).$

$\bar{x} = (-\lambda, -2\lambda-2, \lambda-5)$

$\cancel{-(-\lambda) - 2(-2\lambda)^2 + (\lambda-5) = 5}$

$\cancel{\lambda + 4\lambda + \lambda - 5 = 5}$

$\cancel{4\lambda = 0}$

$\cancel{\lambda = 0.}$ $\cancel{\rightarrow (0,-2,-5).}$

No.

$-(-\lambda) - 2(-2\lambda-2) + (\lambda-5) = 5.$

$\lambda + 4\lambda + 4 + \lambda - 5 = 5$

$6 \cdot \lambda = 10 - 4$

$\lambda = \frac{6}{6} = 1.$

$\bar{x} = (-1, -4, -4).$ $C = (-1,-4,-4).$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Rta.:} \\ B = (0,-2,-5). \\ C = (-1,-4,-4). \end{array}}$$