Intersección de rectas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Ejemplo 1. Hallar la intersección de las rectas $\mathbb{L}_1 : \lambda(2,0) + (-2,3)$ y $\mathbb{L}_2 : \lambda(3,1) + (-1,1)$.

Solución: Si un punto Q está en la intersección de las dos rectas, deben cumplirse simultáneamente $Q \in \mathbb{L}_1$ y $Q \in \mathbb{L}_2$. Como vimos en el Ejemplo 5 de las explicaciones sobre **Rectas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$**, para que esto ocurra deben existir valores particulares de los parámetros tal que, al reemplazarlos en las ecuaciones de las rectas, determinen las coordenadas de Q. Pero esos valores pueden diferir para cada recta así que, aunque en el enunciado se use la misma letra λ para los parámetros en ambas ecuaciones, ahora debemos distinguirlos.
Buscamos entonces $Q \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ que verifiquen simultáneamente:

$$\begin{aligned} Q &= \lambda(2,0) + (-2,3) \quad (Q \in \mathbb{L}_1) \\ Q &= \mu(3,1) + (-1,1) \quad (Q \in \mathbb{L}_2) \end{aligned}$$

Si igualamos los dos lados derechos obtenemos ecuaciones para λ y μ:

$$\begin{aligned} \lambda(2,0) + (-2,3) &= \mu(3,1) + (-1,1) \\ (2\lambda - 2, 3) &= (3\mu - 1, \mu + 1) \end{aligned}$$

Igualando coordenada a coordenada:

$$2\lambda - 2 = 3\mu - 1 \quad \text{y} \quad 3 = \mu + 1$$

De la segunda ecuación obtenemos $\mu = 2$ y, sustituyendo en la primera, despejamos λ:

$$2\lambda - 2 = 3 \cdot 2 - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = \frac{7}{2}$$

Para encontrar Q reemplazamos alguno de los valores hallados en la ecuación de la recta correspondiente, por ejemplo $\mu = 2$ en $\mathbb{L}_2 : \mu(3,1) + (-1,1)$:

$$Q = 2(3,1) + (-1,1) = (5,3)$$

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{(5,3)\}}$

Verificación:

Reemplazamos $\lambda = \dfrac{7}{2}$ en la ecuación paramétrica de la recta que $\mathbb{L}_1$:

$$Q = \frac{7}{2}(2,0) + (-2,3) = (7 - 2, 0 + 3) = (5,3)$$

También podemos ver que no son la misma recta ya que no tienen la misma dirección, así que no debe haber más de un punto en la intersección:
Si $k \in \mathbb{R}$ cumple $(2,0) = k(3,1)$ entonces $2 = 3k$ y $0 = k$ que no se verifican simultáneamente.

Ejemplo 2. Hallar la intersección de las rectas $\mathbb{L}_1 : \lambda(2,-1)+(-2,3)$ y $\mathbb{L}_2 : \lambda(-4,2)+(0,2)$.

Solución: Como en el ejemplo anterior, un punto Q está en $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ si

$$Q = \lambda(2,-1)+(-2,3) \quad \text{y} \quad Q = \mu(-4,2)+(0,2)$$

para valores adecuados de λ y μ. Entonces, buscamos λ y μ tales que

$$\begin{gathered} \lambda(2,-1)+(-2,3) = \mu(-4,2)+(0,2) \\ (2\lambda-2,-\lambda+3) = (-4\mu,2\mu+2) \end{gathered}$$

Esta igualdad es equivalente a que

$$2\lambda - 2 = -4\mu \quad \text{y} \quad -\lambda+3 = 2\mu+2$$

De la primera ecuación podemos despejar $\lambda = -2\mu+1$, que al reemplazar en la segunda nos da:

$$-(-2\mu+1)+3 = 2\mu+2 \iff 2\mu+2 = 2\mu+2 \iff 2=2$$

que es una *identidad* (se verifica independientemente de las incógnitas).
Solo nos queda la relación $\lambda = -2\mu+1$ que vale para cualquier $\mu \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, para cualquier valor de $\mu \in \mathbb{R}$ se obtiene un valor de λ (y recíprocamente). Esto nos dice que cada punto de $\mathbb{L}_2$ pertenece a $\mathbb{L}_1$ (y recíprocamente), mostrando así que las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ están superpuestas (son la misma recta descripta con ecuaciones diferentes).

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2}$

Verificación:

Podemos ver que los vectores directores son paralelos:

$$(-4,2) = -2(2,-1)$$

y que además un punto de paso de una de las rectas pertenece a la otra:

$$(0,2) = \lambda(2,-1)+(-2,3) = 1(2,-1)+(-2,3) = (0,2)$$

Observaciones

Si en lugar de una identidad llegábamos a un *absurdo* (igualdad que no se verifica), significaría que no hay puntos en común entre las rectas. Como estamos en el plano, tendríamos que concluir que las rectas son paralelas y distintas.

El mismo procedimiento de los ejemplos anteriores se aplica para determinar la intersección de rectas en el espacio, pero deja de ser válida la conclusión anterior.
En el espacio, si dos rectas no son paralelas y no tienen puntos en común, diremos que son *alabeadas*.

Ejemplo 3. Hallar la intersección de las rectas $\mathbb{L}_1 : \lambda(2,2,1)+(2,1,-3)$ y $\mathbb{L}_2 : \lambda(1,-1,1)+(0,2,3)$.

Solución: Observemos que estas dos rectas no son paralelas, ya que

$$(2,2,1) = k(1,-1,1) \quad \Longleftrightarrow \quad 2 = k \quad \text{y} \quad 2 = -k \quad \text{y} \quad 1 = k$$

que no se pueden cumplir simultáneamente.
El mismo procedimiento de antes para buscar la intersección

$$\begin{aligned} \lambda(2,2,1) + (2,1,-3) &= \mu(1,-1,1) + (0,2,3) \\ (2\lambda+2, 2\lambda+1, \lambda-3) &= (\mu, -\mu+2, \mu+3) \end{aligned}$$

nos conduce a las tres ecuaciones

$$2\lambda + 2 = \mu \quad , \quad 2\lambda + 1 = -\mu + 2 \quad \text{y} \quad \lambda - 3 = \mu + 3.$$

De la primera ecuación obtenemos $\mu = 2\lambda + 2$. Reemplazamos en la segunda y despejamos λ:

$$2\lambda + 1 = -(2\lambda + 2) + 2 \iff \lambda = -\frac{1}{4}$$

Volviendo a la expresión para μ tenemos

$$\mu = 2\left(-\frac{1}{4}\right) + 2 = \frac{3}{2}$$

Reemplazando estos valores de λ y μ en la tercera ecuación nos queda un absurdo:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} - 3 &= \frac{3}{2} + 3 \\ -\frac{13}{4} &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Esto significa que no existen valores λ y μ que, al ser reemplazados en las ecuaciones paramétricas de $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$, den el mismo punto; es decir, las rectas no tienen ningún punto en común.

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \emptyset.}$

Como no son paralelas estas rectas son alabeadas.