¡Felicitaciones! :)

C ANÁLISIS (ING. Y EX.) (66) 2do PARCIAL 2do CUATRIMESTRE DE 2023 **Tema 3**

APELLIDO [redacted] **NOMBRES** [redacted] **DNI** [redacted]

NOTA del 1er parcial:	7^{+}

INSCRIPTO EN:

SEDE: C.U.	**DIAS:** Lu, Mier, Jue
HORARIO 14-17hs	**AULA:** 206

1	2	3	4	NOTA
B	B	B	B^{-}	10^{-} (diez^{-})

Duración: 2:30 hs

PROMOCIONA 9 (nueve)	~~**RECUPERA - Jueves 23-11**~~ ~~1ro / 2do~~
INSUFICIENTE	~~**FINAL**~~ - ó -

Los razonamientos usados para la resolución de los problemas deben figurar en la hoja.

1. Sean $f(x) = 3\ln(ax+1) - x$ con $a > 0$ y $p(x) = cx^3 - 54x^2 + bx$. Hallar los valores de a, b y c para que p sea el polinomio de Taylor de orden 3 de f en $x_0 = 0$.

2. Hallar una función f que satisfaga: $f'(x) = x\cos(4x)f(x)$ y $f(\pi) = 1$.

3. Calcular el área de la región encerrada por el gráfico de $f(x) = \dfrac{\ln(x) - 3}{x}$ y el eje x para $1 \leq x \leq e^5$.

4. Hallar todos los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n}{n^4 + n}(x-2)^n$ converge.

1) $f(x) = 3\ln(ax+1).$

$P(x) = cx^3 - 54x^2 + bx$

P es el polinomio de Taylor de orden 3 de f en $x=0$; entonces.

$$\begin{cases} ① f(0) = P(0) \\ ② f'(0) = P'(0) \\ ③ f''(0) = P''(0). \\ ④ f'''(0) = P'''(0). \end{cases}$$

f es derivable por composición de derivables.
P es derivable xq es un polinomio.

$\Rightarrow$ ① $f(0) = P(0)$

$3\ln(ax+1) - x = cx^3 - 54x^2 + bx$

$0 = 0.$

② $f'(0) = P'(0).$

$\frac{3}{ax+1} \cdot a - 1 = 3cx^2 - 108x + b.$

$\boxed{3a - 1 = b}.$

③ $f''(0) = P''(0).$

$\left[3a\,(ax+1)^{-1}\right]' = 6cx - 108.$

$\frac{-3a \cdot a}{(ax+1)^2} = 6cx - 108.$

$-3a^2 = -108.$

$\boxed{a^2 = 36}.$

D ÁLGEBRA

APELLIDO

INSCR

④ $f'''(0) = P'''(0)$.

$$\left[-3a^2 \cdot (ax+1)^{-2}\right]' = 6C$$

$$\frac{6a^2 \cdot a}{(ax+1)^3} = 6C.$$

$$6a^3 = 6C$$

$$\boxed{a^3 = c}$$

- Junto todas las expresiones obtenidas:

$$\begin{cases} 0=0 \\ 3a-1=b. \\ a^3=C. \\ a^2=36. \end{cases}$$

Resuelvo el sistema recordando que $\boxed{a>0}$.

$\rightarrow$ $a^2=36$.

$\sqrt{a^2} = \pm\sqrt{36}$.

~~$a=-\sqrt{36}$~~ descartado

$a=\sqrt{36}$.

$\boxed{a=6}$

$3a-1=b$

$3.6-1=b$

$\boxed{17=b}$

$a^3=C$

$6.6.6=C$

$\boxed{216=C}$

<u>Rta</u>: Las valores de a, b, y c responden a: $a=6$; $b=17$ y $c=21$ tal que $a>0$ y Px sea el polinomio de taylor de f.

2) $f'(x) = x \cos(4x) \cdot f(x)$.

$$\left.\frac{f'(x)}{f(x)} = x \cos(x4).\right] \rightarrow$$ al ser términos iguales; sus primitivas tmb lo son.

$$\underbrace{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx}_{C.A_1} = \overbrace{\int x \cos(4x)\,dx}^{CA_2}.$$

$x \cos(x4)$ es integrable xq es continua; al estar compuesta por productos y composición de continuas.

CA_1

$$\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} \underset{\downarrow}{=} \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C.$$
$$= \ln|f(x)| + C.$$

Sustitución:

$u = f(x)$

$du = f'(x)\,dx$.

CA_2 $$\int x \cos(4x)\,dx \underset{\downarrow}{=} \int \frac{u}{4} \cos(u) \frac{du}{4}$$

Sustitución

$4x = u$

$x = \frac{u}{4}$.

$du = 4 \cdot dx$.

$\frac{du}{4} = dx$

$$\frac{1}{16} \int u \cdot \cos(u)\,du \underset{\substack{\downarrow \\ \text{partes}}}{=} \frac{1}{16}\left[u \cdot \text{sen}\, u - \int \text{sen}(u)\,du\right.$$

$f(x) = u$ $f'(x) = 1$.

$g(x) = \text{sen}(u)$. $g'(x) = \cos(u)$

$$\int \cos(w)\, d w = \frac{1}{16}\left[w \cdot \text{sen}(w) - \int \text{sen}(w) dw\right]$$

$$= \frac{w \cdot \text{sen}(w) + \cos(w)}{16} + C.$$

"deshago" la sustitución

$$\frac{4x \cdot \text{sen}\, 4x + \cos(4x)}{16} + C$$

$$\ln|f(x)| = \frac{4x \cdot \text{sen}(4x) + \cos(4x)}{16} + C$$

aplico exponencial a ambos términos.

$$e^{\ln|f(x)|} = e^{\frac{4x\, \text{sen}(4x) + \cos(4x)}{16} + C}$$

$$f(x) = e^{\frac{4x\, \text{sen}(4x) + \cos 4x}{16} + C}$$

Busco hallar C teniendo como dato $f(\pi) = 1$

$$\ln|f(\pi)| = \frac{4\pi \cdot \text{sen}(4\pi) + \cos 4\pi}{16} + C$$

$$\ln(1) = 0 + \frac{1}{16} + C.$$

$$0 = \frac{1}{16} + C$$

$$\boxed{\frac{-1}{16} = C.}$$

$$f(\pi) = e^{\frac{0 + 1 - 1}{16}}$$

$$f\pi = e^0 = 1 ✓$$

Rta:

$$\boxed{f(x) = e^{\frac{4x \cdot \text{sen}(4x) + \cos 4\pi - 1}{16}}}$$

3) Busco hallar el área entre $f(x)$ y el eje x.

Defino $g(x) = 0$.

•) Busco intersecciones:

$$g(x) = f(x)$$

$$0 = \frac{\ln(x) - 3}{x}.$$

$$0 = \ln(x) - 3$$

$$3 = \ln(x)$$

$$e^3 = x. \checkmark$$

••) Busco "techo y piso".

g y f son continuas;

⇒ comparo por Bolzano "conservación del signo"

• en el intervalo $(1; e^3) \rightarrow$ el techo es $g(x)$.

$\boxed{x=e}$

$g(e)$ vs $f(e)$.

$g(e) = 0$ vs $f(e) = \frac{-2}{e}$.

$$0 > \frac{-2}{e}.$$

• en el intervalo $(e^2; e^5) \rightarrow$ el techo es $f(x)$.

$\boxed{x=e^4}$

$g(e^4)$ vs $f(e^4)$

$g(e^4) = 0$ vs $f(e^4) = \frac{1}{e^4}$

$$0 < \frac{1}{e^4}$$

para la resol el área:

$$g(x) - f(x)dx + \int_{e^3}^{e^5} f(x) - g(x)\,dx = A.$$

$$g(x) = 0 \quad y \quad f(x) = \frac{\ln(x) - 3}{x}.$$

$$= \int_{1}^{e^3} - f(x)\,dx + \int_{e^3}^{e^5} f(x).\,dx$$

usco primitivas:

$$\int f(x) = \int \frac{\ln(x) - 3}{x}\,dx =$$

$$\overbrace{\int \frac{\ln(x)}{x}dx}^{CA_2} - \underbrace{\int \frac{3}{x}\,dx.}_{CA_1}$$

CA 1

$$3 \int \frac{1}{x}\,dx = 3\ln|x| + C.$$

~~CA 2~~

~~$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \ln(x).\ln(x) - \underbrace{\int [illegible]\,dx.}_{CA.}$~~

~~partes.~~

~~$f(x) = \ln(x) \quad F'(x) = \frac{1}{x}$~~

~~$f(x) = \ln(x) \quad f'(x) = \frac{1}{x}$~~

UPERA
10 hs

$$\int \ln(x)\cdot\frac{1}{x}dx = \int u\cdot du$$

$\downarrow$

Sustitución

$u = \ln x$ ✓

$du = \frac{1}{x}dx$ ✓

$$\int u\, du = \frac{u^2}{2}+c.$$

$$= \frac{\ln^2|x|}{2}+c.$$ ✓

$$\int f(x) = \frac{\ln^2(x)}{2} - 3\ln|x| + c.$$

Aplico Barrow ✓

$$A = \underbrace{\int_{1}^{e^3} -f(x)\,dx}_{C.A.1.} + \int_{e^3}^{e^5} f(x)\,dx.$$

$$CA_1 = -\int_1^{e^3} f(x)\,dx = -1\cdot\left(\frac{\ln^2(x)}{2} - 3\ln|x|\,\Big|_1^{e^3}\right)$$

$$-1\cdot\left(-\frac{\ln^2(1)}{2} - 3\ln 1 + \frac{\ln^2(e^3)}{2} + 3\ln e^3\right)$$

$$\int_1^{e^3} -f\,x\,dx = \frac{9}{2}$$ ✓

APELLIDO ....

NSCRIPTO EN:

NOTA del 1°

$\frac{1}{r}$

$$\int_{e^3}^{e^5} f(x)\,dx =$$

$$\frac{\ln^2(x)}{2} - 3\ln(x) \Big|_{e^3}^{e^5} =$$

$$\frac{(\ln(e^5))^2}{2} - 3\ln e^5 - \frac{\ln^2(e^3)}{2} + 3\ln(e^3)$$

✓

$$= 2.$$

$$A = -\int_1^{e^3} fx + \int_{e^3}^{e^5} fx$$

$$A = \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}.$$

Rta: El area comprendida entre f(x) y el eje x en $1 < x < e^5$ Responde $A = \frac{13}{2}$.

Bien

4) Busco x tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^4+4}(x-2)^n$ sea convergente

Criterio de la raíz enésima:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{4^n}{n^4+4}(x-2)^n\right|}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{4^n}}{\sqrt[n]{n^4+4}} \sqrt[n]{|x-2|^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4|x-2|}{\sqrt[n]{n^4+4}}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4|x-2|}{\underbrace{\sqrt[n]{n^4}}_{\to 1}\underbrace{\sqrt[n]{1+\underbrace{\frac{4}{n^4}}_{\to 0}}}_{\to 1}} = 4|x-2|.$$

Si [illegible] $4|x-2|<1$; entonces la serie converge absolutamente.

$$|x-2|<\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4}<x-2<\frac{1}{4}$$

$\frac{7}{4}<x<\frac{9}{4}$. para $x\in\left(\frac{7}{4},\frac{9}{4}\right)$ la serie original converge.

Si $4|x-2|>1$ la serie no converge!

$\frac{7}{4}>x>\frac{9}{4}$ para $x\in\left(-\infty,\frac{7}{4}\right)\cup\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$ la serie original no converge.

Ahora; estudio convergencia en los puntos $x=\frac{7}{4}$ y $x=\frac{9}{4}$.

$\frac{\quad^n}{n^4+n}\left(\frac{1}{4}\right)^n \; x = \frac{7}{4}$

es la alternada

de

$\sum (-1)^n \frac{\cancel{4^n}}{n^4+n} \cancel{4^n}$

Por leibniz

$\frac{1}{n^4+n}$ → es decreciente.

$\lim \frac{1}{n^4+n} = 0$

⇒ converge.

Rta: la serie es convergente en $x \in \left[\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right]$ y no convergente en $x \in \left(-\infty ; \frac{7}{4}\right) \cup \left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$

$x = \frac{9}{4}$. $\sum_{n^4+n} \frac{4^n}{n^4+n}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

Le aplico el criterio necesario de Cauchy.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{4^n}}{(n^4+n)\cancel{4^n}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4+n}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{n^4\left(1+\underbrace{\frac{n}{n^4}}_{\to 0}\right)}_{\to+\infty}} = 0.$$

El criterio no decide.

$\sum \frac{\cancel{4^n}}{n^4+n} \frac{1}{\cancel{4^n}}$

$\sum \boxed{\frac{1}{n^4+n}} \approx \frac{1}{n^4}$ ✓

Lim x comparación

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^4+n}}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{n^4+n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^4}}{\cancel{n^4}\left(1+\underbrace{\frac{n}{n^4}}_{\to 0}\right)} = \boxed{0} \; 1$$

¿qué le miras a este límite?

Se comportan igual. y como $p > 1$ (series p) $\sum \frac{1}{n^4} < \infty$ y $\sum \frac{1}{n^4+n} < \infty$

Escaneado con CamScanner