TEMA 4

1) Determinar el ó los valores de $\mathbf{k} \in \Re$ para que el conjunto solución del sistema homogéneo asociado al dado , sea un subespacio de $(\Re^3,+,\Re,\bullet)$ de dimensión cero

$$\begin{cases} x - y + kz = 9 \\ x + ky + z = 10 \\ -kx - y - z = 2 \end{cases}$$

$\boxed{k \neq 0 \ \wedge \ k \neq 1 \ \wedge \ k \neq -1}$

El sistema homogéneo asociado $\begin{cases} x - y + kz = 0 \\ x + ky + z = 0 \\ -kx - y - z = 0 \end{cases}$ **tiene dimensión cero si solo si es un sistema compatible determinado o sea la única solución es el vector nulo.**

Como el sistema es cuadrado el determinante de sus coeficientes debe ser distinto de cero

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 1 & k & 1 \\ -k & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \Rightarrow \ 1(-k+1) + 1(-1+k) + k(-1+k^2) \neq 0$$

$$-k + 1 - 1 + k + k(-1+k^2) \neq 0$$

$$k(-1+k^2) \neq 0$$

La solución de la ecuación $k(-1+k^2) = 0$

$$k(k^2-1) = 0$$

$$\Rightarrow k(k-1)(k+1) = 0 \ \Rightarrow k = 0 \ \vee \ k = 1 \ \vee \ k = -1$$

Luego para que $k(k^2-1) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k \neq 0 \ \wedge \ k \neq 1 \wedge k \neq -1}$

2) Sea $\mathbf{A} = \{ (-3;1;-2)\,, (6;-2;k)\,, (3;-1;k) \}$

a) Hallar $\mathbf{k} \in \Re$ para que el conjunto de vectores de **A** sea linealmente independiente $\boxed{\text{no} \exists\, k \in \Re}$

.

b) Usando el conjunto A, si $\mathbf{k} = 0$, ¿Qué subespacio genera **A** ? $\boxed{\bar{A} = \{(x;y;z) \in \Re^3 \,/\, x = -3y\}}$

c) Hallar una base y la dimensión de $\bar{A}$ $\boxed{B = \{ (-3;1;0)\,, (0;0;1) \} \ \dim \bar{A} = 2}$

a) $A=\{(-3;1;-2),(6;-2;k),(3;-1;k)\}$ es linealmente independiente si y solo si la única combinación lineal que da el vector nulo es la trivial o sea:

$\alpha(-3;1;-2)+\beta(6;-2;k)+\gamma(3;-1;k)=(0;0;0) \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$

$(-3\alpha;\alpha;-2\alpha)+(6\beta;-2\beta;k\beta)+(3\gamma;-\gamma;k\gamma)=(0;0;0)$

$$(-3\alpha+6\beta+3\gamma;\alpha-2\beta-\gamma;-2\alpha+k\beta+k\gamma)=(0;0;0) \Rightarrow \begin{cases}-3\alpha+6\beta+3\gamma=0\\ \alpha-2\beta-\gamma=0\\ -2\alpha+k\beta+k\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 6 & 3 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 0\\ -2 & k & k & 0\end{array}\right)$$

El sistema homogéneo a resolver es cuadrado y para que la única solución sea la nula o trivial el sistema debe ser compatible determinado entonces el determinante de sus coeficientes debe ser distinto de cero

$$\begin{vmatrix}-3 & 6 & 3\\ 1 & -2 & -1\\ -2 & k & k\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow -3(-2k+k)-6(k-2)+3(k-4)\neq 0 \Rightarrow$$

$6k-3k-6k+12+3k-12\neq 0 \Rightarrow 0\neq 0$ Absurdo

Luego los vectores son LD para cualquier valor de k $\boxed{\text{no} \exists\, k\in\Re \text{ tal que los vectores sean LI}}$

b) Si $k=0$ entonces $A=\{(-3;1;-2),(6;-2;0),(3;-1;0)\}$

Planteo la C.L igualando a un vector genérico de $\Re^3$

$\alpha(-3;1;-2)+\beta(6;-2;0)+\gamma(3;-1;0)=(x;y;z)$

$(-3\alpha;\alpha;-2\alpha)+(6\beta;-2\beta;0)+(3\gamma;-\gamma;0)=(x;y;z)$

$$(-3\alpha+6\beta+3\gamma;\alpha-2\beta-\gamma;-2\alpha)=(x;y;z) \Rightarrow \begin{cases}-3\alpha+6\beta+3\gamma=x\\ \alpha-2\beta-\gamma=y\\ -2\alpha \qquad\qquad =z\end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 6 & 3 & x\\ 1 & -2 & -1 & y\\ -2 & 0 & 0 & z\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 6 & 3 & x\\ \boxed{1} & -2 & -1 & y\\ -2 & 0 & 0 & z\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 0 & x+3y\\ 1 & -2 & -1 & y\\ 0 & -4 & -2 & z+2y\end{array}\right)_{F_3.\left(-\frac{1}{2}\right)}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 0 & x+3y\\ 1 & -2 & -1 & y\\ 0 & 2 & \boxed{1} & \frac{-z-2y}{2}\end{array}\right)$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 0 & x+3y\\ 1 & 0 & 0 & -\frac{z}{2}\\ 0 & 2 & \boxed{1} & \frac{-z-2y}{2}\end{array}\right)$$

Para que resulta un sistema compatible: $r(A)=r(A')\Rightarrow$

$x+3y=0 \Rightarrow \boxed{\bar{A}=\{(x;y;z)\in\Re^3 / x=-3y\}}$

c) Escribimos un vector genérico $(x;y;z)=(-3y;y;z)=(-3y;y;0)+(0;0;z)=y(-3;1;0)+z(0;0;1)$

$\{(-3;1;0),(0;0;1)\}$ son generadores del subespacio A y además son L.I luego son base

$\Rightarrow B=\{(3;1;0),(0;0;1))\}$ $\dim\bar{A}=2$

3) Si las coordenadas del vector **v = (10; 18)** respecto de la base

B = { (a + 2 ; 2 a + 3) , (b ; b + 1) } son $[2 \quad 4]_B$, hallar la base encontrando los valores de a y b.

$$\boxed{a = 1 \text{ y } b = 1 \Rightarrow B = \{(3;5),(1;2)\}}$$

De acuerdo a los datos del problema podemos escribir :

$2(a+2;2a+3)+4(b;b+1)=(10;18)$

Cualquier vector de $\Re^2$ se puede escribir como combinación lineal de una base de $\Re^2$ y las coordenadas del mismo son los escalares de dicha combinación

$(2a+4;4a+6)+(4b;4b+4)=(10;18)$

$(2a+4+4b;\ 4a+6+4b+4)\ =(10;18)$

$$(2a+4+4b;\ 4a+4b+10)\ =(10;18) \Rightarrow \begin{cases} 2a+\ \ 4+4b=10 \\ 4a+4b+10=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+4b=6 \\ 4a+4b=8 \end{cases} \Rightarrow a=1 \wedge b=1$$

Entonces reemplazando los valores de a y b la base pedida es $B=\{(3;5),(1;2)\}$

4) La siguiente ecuación $\frac{x}{70}+\frac{y}{40}+\frac{z}{20}=1$ representa el plano balance del presupuesto de un consumidor cuyo ingreso es de **$ 2800** que lo destina en su totalidad a comprar tres tipos de bienes

.

a) Hallar la ecuación presupuestaria $\boxed{40x+70y+140z=2800}$

b) Escriba el vector precio. $\boxed{(40;70;140)}$

c)) Encontrar el valor de α sabiendo que **(7; 8; α)** es una posibilidad de consumo. $\boxed{\alpha=14}$

$$\textbf{a)}\quad \frac{x}{70}+\frac{y}{40}+\frac{z}{20}=1 \Rightarrow \frac{4x+7y+14z}{280}=1 \Rightarrow 4x+7y+14z=280$$

Como el ingreso es $ 2800 multiplicamos miembro a miembro la igualdad por 10 para obtener la ecuación presupuestaria $10.(4x+7y+14z)=10.280 \Rightarrow \boxed{40x+70y+140z=2800}$

b) Como la ecuación presupuestaria es : $40x+70y+140z=2800$

el vector precio es : $\boxed{(40;70;140)}$

c) Como la ecuación presupuestaria es : $40x+70y+140z=2800$

Para que (7;8; α) sea una posibilidad de consumo debe verificar la ecuación presupuestaria

$$40.7+70.8+140.\alpha=2800 \quad \Rightarrow 280+560+140\alpha=2800 \Rightarrow \alpha=\frac{2800-280-560}{140}=14$$

$\boxed{\alpha=14}$

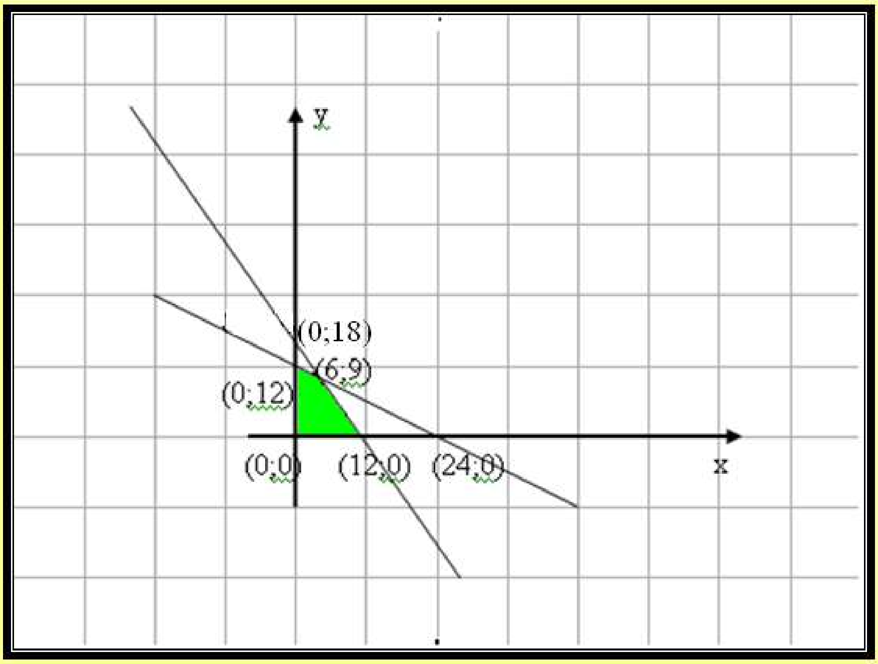
5) a) Maximizar utilizando el método gráfico: $z = 4x + 8y$

sujeta a $\begin{cases} x + 2y \le 24 \\ 3x + 2y \le 36 \end{cases}$ con $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

La función se maximiza en el segmento que une los puntos (0;12) y (6;9) donde $z = 96$

$\begin{cases} x + 2y \le 24 \\ 3x + 2y \le 36 \end{cases} \Rightarrow$ **Los bordes de los semiplanos son** $\begin{cases} x + 2y = 24 & \Rightarrow \dfrac{x}{24} + \dfrac{y}{12} = 1 \\ 3x + 2y = 36 & \Rightarrow \dfrac{x}{12} + \dfrac{y}{18} = 1 \end{cases}$

La intersección de las rectas es la solución del sistema $\begin{cases} x + 2y = 24 \\ 3x + 2y = 36 \end{cases} \Rightarrow (x;y) = (6;9)$



La región factible es el polígono cerrado cuyos vértices son: (0;0) (0;12) (6;9) (12;0)

Calculamos $z = 4x + 8y$ en cada uno de los vértices

$z(0;0) = 4.0 + 8.0 = 0$

$z(0;12) = 4.0 + 8.12 = 96$

$z(6;9) = 4.6 + 8.9 = 96$

$z(12;0) = 4.12 + 8.0 = 48$

La función se maximiza en el segmento que une los puntos (0;12) y (6;9) donde $z = 96$

5) b) Sea : $z = 50x + 150y$ Sujeta a $\begin{cases} x + y \le 8 \\ 2x + y \le 12 \end{cases}$ con $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Maximizar utilizando el método Simplex

Solución que optimiza : $(x_1 ; x_2 ; s_1 ; s_2) = (0 ; 8 ; 0 ; 4)$ $z = 1200$

Las restricciones las transformamos en igualdades, mediante la adición de las variables de holgura

$$\begin{cases} x + y + s_1 = 8 \\ 2x + y + s_2 = 12 \end{cases}$$

	C_j	50	150	0	0		
C_k	X_k	X_1	X_2	s_1	s_2	b	
0	s_1	1	1	1	0	8	8/1 = 8 *Sale la variable s_1*
0	s_2	2	1	0	1	12	12/1 = 12
Z_j		0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$		50	150	0	0		
			Entra la variable X_2				

	C_j	50	150	0	0	
C_k	X_k	X_1	X_2	s_1	s_2	b
150	X_2	1	1	1	0	8
0	S_2	1	0	-1	1	4
Z_j		150	150	150	0	Z=1200
$C_j - Z_j$		-100	0	-150	0	

Como en la ultima fila de la tabla no han quedado valores positivos hemos llegado a la Solución óptima

De la lectura de la tabla se deduce que las ***Variables básicas son*** $x_2 = 8$ *y* $s_2 = 4$

Variables no básicas son : $x_1 = 0$ *y* $s_1 = 0$

Solución que optimiza : $(x_1 ; x_2 ; s_1 ; s_2) = (5 ; 0 ; 2 ; 0)$ $z = 250$