TEMA 3

1) Determinar el ó los valores de $\mathbf{k} \in \Re$ para que el conjunto solución del sistema homogéneo asociado al dado, sea un subespacio de $(\Re^3,+,\Re,\bullet)$ de dimensión cero

$$\begin{cases} (k-1)x + y - 3z = 5 \\ (k+5)z = 1 \\ ky + 5z = 2 \end{cases} \qquad \boxed{k \neq 0 \wedge k \neq 1 \wedge k \neq -5}$$

El sistema homogéneo asociado $\begin{cases} (k-1)x + y - 3z = 0 \\ (k+5)z = 0 \\ ky + 5z = 0 \end{cases}$ **tiene dimensión cero si solo si es un sistema compatible determinado o sea la única solución es el vector nulo.**

Como el sistema es cuadrado el determinante de sus coeficientes debe ser distinto de cero

$$\begin{vmatrix} k-1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & k+5 \\ 0 & k & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -(k+5)[(k-1)k - 0] \neq 0$$

$$-(k+5)(k-1)k \neq 0$$

$$(k+5)(k-1)k \neq 0$$

La solución de la ecuación $(k+5)(k-1)k = 0$

$$k+5=0 \vee k-1=0 \vee k=0$$

$$\Rightarrow k=-5 \vee k=1 \vee k=0$$

Luego para que $(k+5)(k-1)k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k \neq -5 \wedge k \neq 1 \wedge k \neq 0}$

2) Sea $\mathbf{A} = \{ (1;1;0), (-1;k;1), (0;1;1) \}$

a) Hallar $\mathbf{k} \in \Re$ para que el conjunto de vectores de A sea linealmente independiente. $\boxed{k \neq 0}$

b) Usando el conjunto **A** , si $\mathbf{k = 0}$, ¿ Qué subespacio se genera ? $\boxed{\bar{A} = \{(x;y;z) \in \Re^3 / y = x + z\}}$

c) Hallar una base y la dimensión de $\bar{\mathbf{A}}$ $\boxed{B = \{ (1;1;0), (0;1;1) \} \ \dim \bar{A} = 2}$

a) $A=\{(1;1;0),(-1;k;1),(0;1;1)\}$ es linealmente independiente si y solo si la única combinación lineal que da el vector nulo es la trivial o sea:

$\alpha(1;1;0)+\beta(-1;k;1)+\gamma(0;1;1))=(0;0;0) \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$

$(\alpha;\alpha;0)+(-\beta;k\beta;\beta)+(0;\gamma;\gamma)=(0;0;0)$

$$(\alpha-\beta;\alpha+k\beta+\gamma;\beta+\gamma)=(0;0;0) \Rightarrow \begin{cases}\alpha-\beta=0\\ \alpha+k\beta+\gamma=0\\ \beta+\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\1&k&1&0\\0&1&1&0\end{array}\right)$$

El sistema homogéneo a resolver es cuadrado y para que la única solución sea la nula o trivial el sistema debe ser compatible determinado entonces el determinante de sus coeficientes debe ser distinto de cero

$$\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&k&1\\0&1&1\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow 1(k-1)+1(1)\neq 0 \Rightarrow$$

$k-1+1\neq 0 \Rightarrow k\neq 0$

$\Rightarrow \boxed{k\neq 0}$

b) Si $k=0$ entonces $A=\{(1;1;0),(-1;0;1),(0;1;1)\}$ y teniendo en cuenta el punto anterior la familia A es L.D luego genera un subconjunto de $V=\Re^3$

Planteamos la C.L igualando a un vector genérico de $\Re^3$

$\alpha(1;1;0)+\beta(-1;0;1)+\gamma(0;1;1)=(x;y;z)$

$(\alpha;\alpha;0)+(-\beta;0;\beta)+(0;\gamma;\gamma)=(x;y;z)$

$$(\alpha-\beta;\alpha+\gamma;\beta+\gamma)=(x;y;z) \Rightarrow \begin{cases}\alpha-\beta=x\\ \alpha+\gamma=y\\ \beta+\gamma=z\end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&x\\1&0&1&y\\0&1&1&z\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&-1&0&x\\1&0&1&y\\0&1&1&z\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&x\\0&\boxed{1}&1&y-x\\0&1&1&z\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&y\\0&1&1&y-x\\0&0&0&z-y+x\end{array}\right)$$

Para que resulta un sistema compatible: $r(A)=r(A')\Rightarrow z-y+x=0\Rightarrow$

$$\boxed{\bar{A}=\{(x;y;z)\in\Re^3 / z-y+x=0\}=\{(x;y;z)\in\Re^3 / y=x+z\}}$$

c) Escribimos un vector genérico $(x;y;z)=(x;x+z;z)=(x;x;0)+(0;z;z)=x(1;1;0)+z(0;1;1)$

$\{(1;1;0),(0;1;1)\}$ son generadores de $\bar{A}$ y además son L.I luego son base

Una base de $\bar{A}$ es $B=\{(1;1;0),(0;1;1)\}$ $\dim \bar{A}=2$

3) Si las coordenadas del vector **v** = **(26;26)** respecto de la base **B = { (a ; a + 2) , (3b-2 ; b) }** son $\left[4 \quad 2\right]_B$, hallar la base encontrando los valores de a y b.

$$\boxed{a = 3 \text{ y } b = 3 \Rightarrow B = \{(3;5),(7;3)\}}$$

De acuerdo a los datos del problema podemos escribir :

$4(a\ ;\ a+2)+2(3b-2;b)=(26;26)$

Cualquier vector de $\Re^2$ se puede escribir como combinación lineal de una base de $\Re^2$ y las coordenadas del mismo son los escalares de dicha combinación

$(4a\ ;4a+8)+(6b-4;2b)=(26;26)$

$(4a+6b-4;\ 4a+8+2b)\ =(26;26)$

$$(4a+6b-4;\ 4a+2b+8)\ =(26;26)) \Rightarrow \begin{cases} 4a+6b-4=26 \\ 4a+2b+8=26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+6b=30 \\ 4a+2b=18 \end{cases} \Rightarrow a=3 \wedge b=3$$

Entonces reemplazando los valores de a y b la base pedida es $\boxed{B=\{(3;5),(7;3)\}}$

4) Un consumidor tiene **$ 480** y los destina a la compra de bienes en su totalidad
Sabiendo que **(3;6)** y **(4;4)** son dos posibilidades de consumo.

a) Hallar el vector precio $\boxed{\vec{P}=(80;40)}$

b) Hallar la ecuación presupuestaria. $\boxed{80x+40y=480}$

c) Encontrar la expresión de la recta de posibilidades de consumo. $\boxed{\frac{x}{6}+\frac{y}{12}=1}$

a) Resolvemos el siguiente sistema $\begin{cases} 3p_1+6p_2=480 \\ 4p_1+4p_2=480 \end{cases} \Rightarrow p_1=80 \text{ y } p_2=40$

$\boxed{\vec{P}=(80;40)}$

b) La ecuación presupuestaria es : $80x+40y=480$

el vector precio es : $\boxed{(80;40)}$

c) Como la ecuación presupuestaria es : $80x+40y=480$

Dividimos miembro a miembro por 480 $\Rightarrow \frac{80x+40y}{480}=\frac{480}{480} \Rightarrow \frac{80x}{480}+\frac{40y}{480}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x}{6}+\frac{y}{12}=1}$

5) a) Maximizar utilizando el método gráfico:

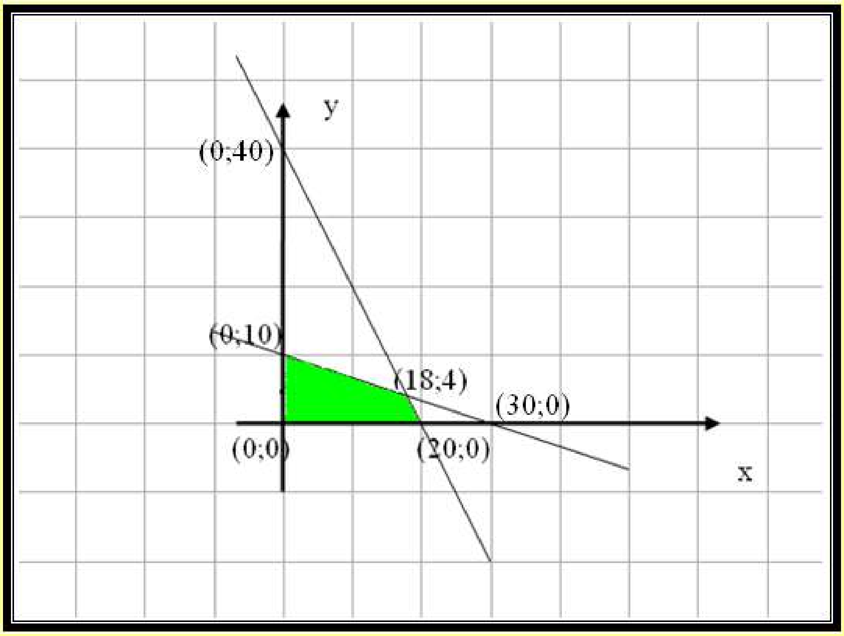
$\mathbf{z = 3x + 4y}$

Sujeta a $\begin{cases} \mathbf{4x + 2y \leq 80} \\ \mathbf{x + 3y \leq 30} \end{cases}$ con $\begin{cases} \mathbf{x \geq 0} \\ \mathbf{y \geq 0} \end{cases}$

La función se maximiza en el vértice (18;4) y $z = 70$

$\begin{cases} 4x + 2y \leq 80 \\ x + 3y \leq 30 \end{cases}$ $\Rightarrow$ **Los bordes de los semiplanos son** $\begin{cases} 4x + 2y = 80 & \Rightarrow \dfrac{x}{20} + \dfrac{y}{40} = 1 \\ x + 3y = 30 & \Rightarrow \dfrac{x}{30} + \dfrac{y}{10} = 1 \end{cases}$

La intersección de las rectas es la solución del sistema $\begin{cases} 4x + 2y = 80 \\ x + 3y = 30 \end{cases} \Rightarrow (x; y) = (18;4)$



La región factible es el polígono cerrado cuyos vértices son : (0;0) (0;10) (18;4) (20;0)

Calculamos $z = 3x + 4y$ en cada uno de los vértices

$z(0;0) = 3.0 + 4.0 = 0$

$z(0;10) = 3.0 + 4.10 = 40$

$z(18;4) = 3.18 + 4.4 = 70$

$z(20;0) = 3.20 + 4.0 = 60$

La función se maximiza en el vértice (18;4) y $z = 70$

5) b) Sea : $\mathbf{z = 5x + 3y}$

Sujeta a $\begin{cases} \mathbf{x + y \leq 7} \\ \mathbf{x + 2y \leq 14} \end{cases}$ con $\begin{cases} \mathbf{x \geq 0} \\ \mathbf{y \geq 0} \end{cases}$

Maximizar utilizando el simplex

Solución que optimiza : $(x_1 ; x_2 ; s_1 ; s_2) = (7 ; 0 ; 0 ; 7) \qquad z = 35$

Las restricciones las transformamos en igualdades, mediante la adición de las variables de holgura

$$\begin{cases} \mathbf{x + y + s_1 = 7} \\ \mathbf{x + 2y + s_2 = 14} \end{cases}$$

	C_j	**5**	**3**	**0**	**0**		
C_k	**X_k**	**X_1**	**X_2**	**s_1**	**s_2**	**b**	
0	**s_1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**7**	**7/1 = 7** ***Sale la variable s_1***
0	**s_2**	**1**	**2**	**0**	**1**	**14**	**14/1 = 14**
Z_j		**0**	**0**	**0**	**0**	**Z = 0**	
$C_j - Z_j$		**5**	**3**	**0**	**0**		
		Entra la variable X_1					

	C_j	**5**	**3**	**0**	**0**	
C_k	**X_k**	**X_1**	**X_2**	**s_1**	**s_2**	**b**
5	**X_1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**7**
50	**s_2**	**0**	**1**	**–1**	**1**	**7**
Z_j		**5**	**5**	**5**	**0**	**Z=35**
$C_j - Z_j$		**0**	**–2**	**–5**	**0**	

Como en la ultima fila de la tabla no han quedado valores positivos hemos llegado a la Solución óptima

De la lectura de la tabla se deduce que las ***Variables básicas son*** $x_1 = 7$ *y* $s_2 = 7$

Variables no básicas son : $x_2 = 0$ *y* $s_1 = 0$

Solución que optimiza : $(x_1 ; x_2 ; s_1 ; s_2) = (7 ; 0 ; 0 ; 7) \qquad z = 35$