TEMA 2

1) Determinar el ó los valores de $\mathbf{k} \in \Re$ para que el conjunto solución del sistema homogéneo asociado al dado, sea un subespacio de $(\Re^3,+,\Re,\cdot)$ de dimensión cero

$$\begin{cases} -x + y - kz = 3 \\ 2x + 2ky + 2z = 1 \\ kx + y + z = 7 \end{cases}$$

$\boxed{k \neq 0 \ \wedge \ k \neq 1 \wedge \ k \neq -1}$

El sistema homogéneo asociado $\begin{cases} -x + y - kz = 0 \\ 2x + 2ky + 2z = 0 \\ kx + y + z = 0 \end{cases}$ **tiene dimensón cero si solo si es un sistema compatible determinado o sea la única solución es el vector nulo.**

Como el sistema es cuadrado el determinante de sus coeficientes debe ser distinto de cero

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -k \\ 2 & 2k & 2 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \Rightarrow (-1)(2k-2) - 1(2-2k) - k(2-2k^2) \neq 0$$

$$-2k + 2 - 2 + 2k - k(2-2k^2) \neq 0$$

$$-k(2-2k^2) \neq 0$$

La solución de la ecuación $-k(2-2k^2) = 0$

$$-2k(1-k^2) = 0$$

$$-2k(1-k)(1+k) = 0 \ \Rightarrow \ k = 0 \ \vee \ k = 1 \vee \ k = -1$$

Luego para que $-k(2-2k^2) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k \neq 0 \ \wedge \ k \neq 1 \wedge \ k \neq -1}$

2) Sea $\mathbf{A} = \{\ (4;k;4)\ ,\ (0;k;2)\ ,(1;\ 1;1)\ \}$

a) Hallar $\mathbf{k} \in \Re$ para que el conjunto de vectores de A sea linealmente independiente. $\boxed{k \neq 4}$

b) Usando el conjunto **A**, si **k** = **0**, ¿Qué subespacio se genera? $\boxed{\overline{A} = \Re^3}$

c) Hallar una base y la dimensión de $\overline{A}$ $\boxed{B = \{\ (4;0;4)\ ,(0;0;2)\ ,(1;1;1)\ \}\ \ \dim \overline{A} = 3}$

a) $A = \{ (4;k;4), (0;k;2), (1;1;1) \}$ es linealmente independiente si y solo si la única combinación lineal que da el vector nulo es la trivial o sea:

$\alpha(4;k;4) + \beta(0;k;2) + \gamma(1;1;1) = (0;0;0) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

$(4\alpha;k\alpha;4\alpha) + (0;k\beta;2\beta) + (\gamma;\gamma;\gamma) = (0;0;0)$

$$(4\alpha+\gamma; k\alpha+k\beta+\gamma; 4\alpha+2\beta+\gamma) = (0;0;0) \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha \quad +\gamma = 0 \\ k\alpha + k\beta + \gamma = 0 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 1 & 0 \\ k & k & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema homogéneo a resolver es cuadrado y para que la única solución sea la nula o trivial el sistema debe ser compatible determinado entonces el determinante de sus coeficientes debe ser distinto de cero

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ k & k & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 4(k-2) + 1(2k-4k) \neq 0 \Rightarrow$$

$4(k-2) + 1(-2k) \neq 0 \Rightarrow 4k - 8 - 2k \neq 0 \Rightarrow 2k - 8 \neq 0$

La solución de la ecuación $2k - 8 = 0 \Rightarrow 2(k-4) = 0 \Rightarrow k - 4 = 0 \Rightarrow k = 4$

Luego para que $2k - 8 \neq 0 \Rightarrow \boxed{k \neq 4}$

b) Si $k = 0$ entonces $A = \{ (4;0;4), (0;0;2), (1;1;1) \}$ y teniendo en cuenta el punto anterior la familia A es L.I y cualesquiera tres vectores de $\Re^3$ L.I generan el espacio $V = \Re^3$

Otra forma: planteo la C.L igualando a un vector genérico de $\Re^3$

$\alpha(4;0;4) + \beta(0;0;2) + \gamma(1;1;1) = (x;y;z)$

$(4\alpha;0;4\alpha) + (0;0;2\beta) + (\gamma;\gamma;\gamma) = (x;y;z)$

$$(4\alpha+\gamma; \gamma; 4\alpha+2\beta+\gamma) = (x;y;z) \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha \quad +\gamma = x \\ \gamma = y \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = z \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 4 & 2 & 1 & z \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & \boxed{1} & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 4 & 2 & 1 & z \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 1 & x \\ -4 & 0 & 0 & y-x \\ 0 & 2 & 0 & z-x \end{array}\right) F_2 . \left(-\frac{1}{4}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 1 & x \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{y-x}{-4} \\ 0 & 2 & 0 & z-x \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 & \frac{y-x}{-4} \\ 0 & 2 & 0 & z-x \end{array}\right) F_3 . \frac{1}{2} \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 & \frac{y-x}{-4} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{z-x}{2} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 & \frac{y-x}{-4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{z-x}{2} \end{array}\right)$$

Resulta un sistema compatible determinado:

$r(A) = r(A') = 3 = n^{o}$ incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D

Luego existe α, β, γ para cada $(x;y;z)$

por lo tanto genera $V = \Re^3 \Rightarrow \boxed{\bar{A} = \Re^3}$

c) Una base del espacio puede ser la misma familia $A \Rightarrow B = \{ (4;0;4), (0;0;2), (1;1;1) \}$ $\dim \bar{A} = 3$

3) Si las coordenadas del vector $\mathbf{v} = \mathbf{(10;18)}$ respecto de la base
$\mathbf{B = \{ (a+2\,;\,2a+3), (b\,;\,b+1) \}}$ son $\begin{bmatrix}2 & 4\end{bmatrix}_B$, hallar la base encontrando los valores de a y b

$$\boxed{\mathbf{a = 1 \text{ y } b = 1 \Rightarrow B = \{(3;5),(1;2)\}}}$$

De acuerdo a los datos del problema podemos escribir :

$\mathbf{2(a+2\,;\,2a+3) + 4(b\,;\,b+1) = (10;18)}$

Cualquier vector de $\mathfrak{R}^2$ se puede escribir como combinación lineal de una base de $\mathfrak{R}^2$ y las coordenadas del mismo son los escalares de dicha combinación

$\mathbf{(2a+4\,;\,4a+6) + (4b\,;\,4b+4) = (10;18)}$

$\mathbf{(2a+4+4b\,;\ 4a+6+4b+4) = (10;18)}$

$$\mathbf{(2a+4+4b\,;\ 4a+4b+10) = (10;18) \Rightarrow \begin{cases} 2a+4+4b = 10 \\ 4a+4b+10 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+4b = 6 \\ 4a+4b = 8 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \wedge b = 1}$$

Entonces reemplazando los valores de a y b la base pedida es $\mathbf{B = \{(3;5),(1;2)\}}$

4) Dada la ecuación del plano balance $\mathbf{\frac{x}{15} + \frac{y}{5} + \frac{z}{10} = 1}$ .Si el ingreso es de **$ 1200**

a) Hallar la ecuación presupuestaria $\boxed{\mathbf{80x + 240y + 120z = 1200}}$

b) El vector precio $\boxed{\mathbf{(80;240;120)}}$

c) ¿Es **(12; 1; 0)** una posibilidad de consumo? $\boxed{\textbf{Si es una posibilidad de consumo}}$

$$\mathbf{a)\quad \frac{x}{15} + \frac{y}{5} + \frac{z}{10} = 1 \Rightarrow \frac{2x+6y+3z}{30} = 1 \Rightarrow 2x+6y+3z = 30}$$

Como el ingreso es $ 1200 multiplicamos miembro a miembro la igualdad por 40 para obtener la ecuación presupuestaria $\mathbf{40.(2x+6y+3z) = 40.30 \Rightarrow \boxed{80x+240y+120z = 1200}}$

b) Como la ecuación presupuestaria es : $\mathbf{80x + 240y + 120z = 1200}$

el vector precio es : $\boxed{\mathbf{(80;240;120)}}$

c) Como la ecuación presupuestaria es : $\mathbf{80x + 240y + 120z = 1200}$

Para que (12;1;0) sea una posibilidad de consumo debe verificar la ecuación presupuestaria

$$\mathbf{80.12 + 240.1 + 120.0 \overset{?}{=} 1200 \Rightarrow 960 + 240 \overset{?}{=} 1200 \Rightarrow 1200 = 1200}$$

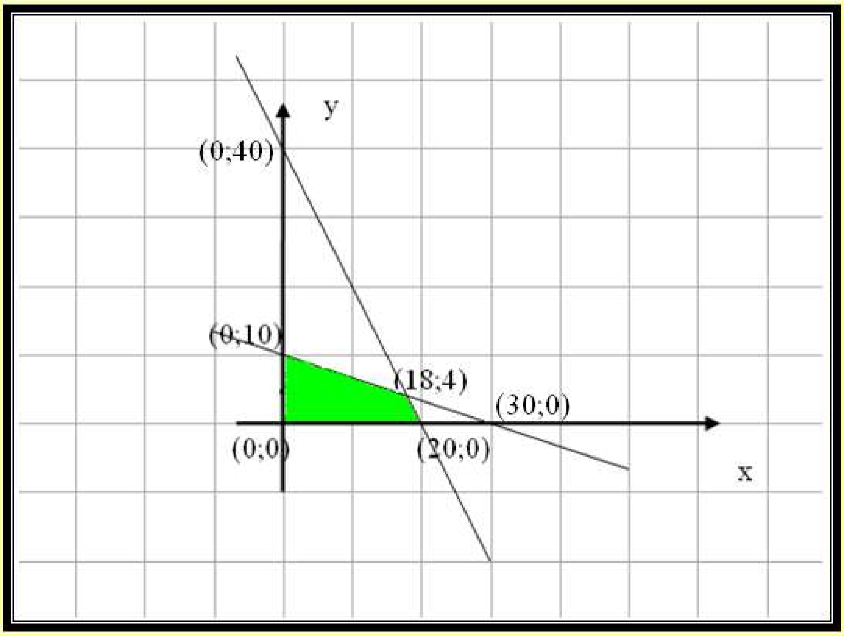
$\boxed{\textbf{Si es una posibilidad de consumo}}$

5) a)Maximizar utilizando el método gráfico: $z = 3x + 4y$

Sujeta a $\begin{cases} 2x + y \le 40 \\ x + 3y \le 30 \end{cases}$ con $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ $\boxed{\text{La función se maximiza en el vértice } (18;4) \quad y \quad z = 70}$

$\begin{cases} 2x + y \le 40 \\ x + 3y \le 30 \end{cases} \Rightarrow$ **Los bordes de los semiplanos son** $\begin{cases} 2x + y = 40 & \Rightarrow & \dfrac{x}{20} + \dfrac{y}{40} = 1 \\ x + 3y = 30 & \Rightarrow & \dfrac{x}{30} + \dfrac{y}{10} = 1 \end{cases}$

La intersección de las rectas es la solución del sistema $\begin{cases} 2x + y = 40 \\ x + 3y = 30 \end{cases} \Rightarrow (x; y) = (18;4)$



La región factible es el polígono cerrado cuyos vértices son : (0;0) (0;10) (18;4) (20;0)

Calculamos $z = 3x + 4y$ **en cada uno de los vértices**

$z(0;0) = 3.0 + 4.0 = 0$

$z(0;10) = 3.0 + 4.10 = 40$

$z(18;4) = 3.18 + 4.4 = 70$

$z(20;0) = 3.20 + 4.0 = 60$

$\boxed{\text{La función se maximiza en el vértice } (18;4) \quad y \quad z = 70}$

5) b) Sea $z = 50x + 10y$

Sujeta a $\begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ con $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Maximizar utilizando el simplex ***Solución que optimiza :*** $(x_1 ; x_2 ; s_1 ; s_2) = (5 ; 0 ; 2 ; 0)$ $z = 250$

Las restricciones las transformamos en igualdades, mediante la adición de las variables de holgura

$$\begin{cases} 2x + 3y + s_1 = 12 \\ x + y + s_2 = 5 \end{cases}$$

	C_j	50	10	0	0		
C_k	X_k	X_1	X_2	s_1	s_2	b	
0	s_1	2	3	1	0	12	12/2 = 6
0	s_2	1	1	0	1	5	5/1 = 5 ***Sale la variable*** s_2
Z_j		0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$		50	10	0	0		
		Entra la variable X_1					

	C_j	50	10	0	0	
C_k	X_k	X_1	X_2	s_1	s_2	b
0	s_1	0	1	1	-2	2
50	X_1	1	1	0	1	5
Z_j		50	50	0	50	Z=250
$C_j - Z_j$		0	-40	0	-50	

Como en la ultima fila de la tabla no han quedado valores positivos hemos llegado a la Solución óptima

De la lectura de la tabla se deduce que las ***Variables básicas son*** $x_1 = 5$ *y* $s_1 = 2$

Variables no básicas son : $x_2 = 0$ *y* $s_2 = 0$

Solución que optimiza : $(x_1 ; x_2 ; s_1 ; s_2) = (5 ; 0 ; 2 ; 0)$ $z = 250$