Universidad Abierta Interamericana

Final

FACULTAD:	Tecnología Informática		
CARRERA:	Lic. en Matemática		
ALUMNO/A:			
ASIGNATURA:	Álgebra II		
PROFESOR:	Cecilia Prieto	FECHA: 11/12/2023	Nota: 10 (diez)
MODALIDAD DE RESOLUCIÓN:		Escrito / Presencial / Individual	

Resultados de aprendizaje:

- Utiliza el lenguaje matemático en forma correcta para mostrar la comprensión de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.
- Aplica el álgebra matricial en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en el espacio $\mathbb{R}^n$.
- Resuelve sistemas de ecuaciones lineales.
- Comprende el concepto de espacio vectorial para identificar conjuntos que tengan dicha estructura demostrando las propiedades de los espacios vectoriales.
- Presenta y escucha argumentos sustentados en elaboraciones críticas, sobre nociones de funciones y espacios vectoriales, para estructurar los conceptos básicos de transformaciones lineales en un ambiente participativo y colaborativo.
- Conocer y manejar las propiedades de los espacios vectoriales.
- Comprender y manejar el concepto de Transformación Lineal.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN:

- **Problemas:** se evaluará la capacidad de comprensión del texto matemático incluido en el problema, detectando incógnitas, datos necesarios para su resolución y comprensión global del enunciado. Se entiende por comprensión global, el contexto donde se incluye el problema, el lenguaje natural incluido en el texto y el lenguaje simbólico o matemático.
- **Ejercicios:** se evaluará la capacidad para: desarrollar un procedimiento detallado, enunciar propiedades o axiomas que se solicitan y justificar las decisiones si así lo requiere el ejercicio.

El parcial se considerará aprobado con una nota de 4 (cuatro) que se obtendrá con el 60% de los ejercicios y problemas, correctamente desarrollado.

Aclaraciones acerca de la Resolución:

- Tanto los problemas como ejercicios deben estar presentados en forma prolija y con palabras y números comprensibles para cualquier lector, escritos con lapicera.
- La construcción de gráficos se realizan con regla, y en forma ordenada.
- Las justificaciones y procedimientos se detallan en lenguaje natural o cotidiano, sin descartar la inclusión delenguaje matemático o simbólico
- **<u>En todos los ejercicios escribir los razonamientos que justifican la respuesta.</u>**

Consignas:

1) Sean $H = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_4 = 0\}$, $T = \langle (1,2,0,1); (0,0,2,1) \rangle$ y $S = \langle (1,1,-1,0); (1,1,1,1) \rangle$ subespacios en $\mathbb{R}^4$. Hallar un subespacio $W \subset H$ que verifique $\langle (1,-2,4,1) \rangle + W = S + T$. Justificar.

2) Dada $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_4, x_2 + x_3 - 2x_4, x_2 + x_3 - 2x_{4_4}, x_2 - x_4)$. Definir, si es posible, una transformación lineal $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente:

$$N(f) \subset N(g), \quad N(f) \cap Im(g) \neq \{\bar{0}\} \ \text{y} \ Im(f) = N(g) + Im(g)$$

3) Sea $B = \{(0,0,1); (1,0,-1); (1,1,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por $M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 6 & -9 & -4 \\ 4 & -5 & -2 \end{pmatrix}$. Decidir si f es diagonalizable.

1) $H = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_4 = 0\}$, $T = \langle (1,2,0,1); (0,0,2,1) \rangle$
$S = \langle (1,1,-1,0); (1,1,1,1) \rangle$. Hallar $W \subset H$ tal que
$\langle (1,-2,4,1) \rangle + W = S + T$

• Base y dimensión de H:
De $x_1 - x_2 - x_4 = 0$, $x_4 = x_1 - x_2$; si $\bar{x} \in H$ resulta
$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_1 - x_2) = x_1(1,0,0,1) + x_2(0,1,0,-1) +$
$x_3(0,0,1,0)$; luego, una base de H es
$B_H = \{(1,0,0,1); (0,1,0,-1); (0,0,1,0)\}$ y $\dim(H) = 3$

• Base y dimensión de S + T
$S + T = \langle (1,1,-1,0); (1,1,1,1); (1,2,0,1); (0,0,2,1) \rangle$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3' = F_3 - F_1}{\overset{F_2' = F_2 - F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3'' = F_4' \\ F_4'' = F_4' - F_2'}}{\overset{F_2'' = F_3'}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$ luego $rg(A) = 3$ (3 vectores LI) con lo cual $\dim(S+T) = 3$; como $(0,0,2,1) = (-1)(1,1,-1,0) + (1)(1,1,1,1)$, una base de S+T es

$B_{S+T} = \{(1,1,-1,0); (1,1,1,1); (1,2,0,1)\}$

• $(S+T) \cap H$
Si $\bar{x} \in (S+T)$, $\bar{x} = \alpha(1,1,-1,0) + \beta(1,1,1,1) + \gamma(1,2,0,1) = (\alpha+\beta+\gamma,$
$\alpha+\beta+2\gamma, -\alpha+\beta, \beta+\gamma)$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Reemplazando en
$x_1 - x_2 - x_4 = 0$ resulta,
$\alpha+\beta+\gamma - (\alpha+\beta+2\gamma) - (\beta+\gamma) = \alpha+\beta+\gamma-\alpha-\beta-2\gamma-\beta-\gamma = 0$
$-2\gamma - \beta = 0$, $\beta = -2\gamma$; Luego $\bar{x} = \alpha(1,1,-1,0) + (-2\gamma)(1,1,1,1) +$
$\gamma(1,2,0,1) = \alpha(1,1,-1,0) + \gamma(-1,0,-2,-1)$.

Luego $(S+T)\cap H = \langle(1,1,-1,0);(-1,0,-2,-1)\rangle$; con lo cual $\dim((S+T)\cap H) = 2$

• Subespacio W

Si $W = (S+T)\cap H = \langle(1,1,-1,0);(-1,0,-2,-1)\rangle$, se cumple que $W\subset H$; tambien

$(1,-2,4,1) = \alpha(1,1,-1,0)+\beta(1,1,1,1)+\gamma(1,2,0,1)$; $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma = 1\\ \alpha+\beta+2\gamma = -2\\ \alpha+\beta = 4\\ \beta+\gamma = 1\end{cases}$; del cual $\alpha = 0$, $\beta = 4$, $\gamma = -3$, entonces $(1,-2,4,1)\in(S+T)$

Como $\nexists\,\delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$ tales que $(1,-2,4,1) = \delta(1,1,-1,0)+\varepsilon(-1,0,-2,-1)$, el conjunto $B = \{(1,-2,4,1);(1,1,-1,0);(-1,0,-2,-1)\}$ es LI, luego $\langle(1,-2,4,1)\rangle + W = S+T$. Por lo tanto, el subespacio buscado es $W = \langle(1,1,-1,0);(-1,0,-2,-1)\rangle$

2) $g(\bar{x}) = (x_2-x_4,\ x_2+x_3-2x_4,\ x_2+x_3-2x_4,\ x_2-x_4)$. Definir $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ / $Nu(f)\subset Nu(g)$, $Nu(f)\cap Im(g)\neq\{\bar{0}\}$ y $Im(f) = Nu(g)+Im(g)$

• Nucleo de g

De $g(\bar{x}) = (x_2-x_4,\ x_2+x_3-2x_4,\ x_2+x_3-2x_4,\ x_2-x_4)$

$\begin{cases}x_2-x_4 = 0\\ x_2+x_3-2x_4 = 0\end{cases}$; $\begin{cases}x_2 = x_4\\ x_2+x_3-2x_2 = 0\end{cases}$; $\begin{cases}x_2 = x_4\\ x_3 = x_2\end{cases}$

Luego, $\bar{x} = (x_1,x_2,x_2,x_2) = x_1(1,0,0,0)+x_2(0,1,1,1)$; una base de $Nu(g)$ es $B_{Nu(g)} = \{(1,0,0,0);(0,1,1,1)\}$; $\dim(Nu(g)) = 2$

• Imagen de g

Si $\bar{y}\in Im(g)$; $\bar{y} = (y_1,y_2,y_3,y_4) = (x_2-x_4,\ x_2+x_3-2x_4,\ x_2+x_3-2x_4,\ x_2-x_4)$.

$$\begin{cases} y_1 = x_2 - x_4 \\ y_2 = x_2 + x_3 - 2x_4 \\ y_3 = x_2 + x_3 - 2x_4 \\ y_4 = x_2 - x_4 \end{cases}$$; luego, $y_1 = y_4$, $y_2 = y_3$;

$\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1, y_2, y_2, y_1) = y_1(1,0,0,1) + y_2(0,1,1,0)$;
una base de $Im(g)$ es $B_{Im(g)} = \{(1,0,0,1); (0,1,1,0)\}$; $\dim(Im(g)) = 2$

• Imagen de f

$Im(f) = Nu(g) + Im(g)$ (enunciado), luego
$Im(f) = \langle (1,0,0,0); (0,1,1,1); (1,0,0,1); (0,1,1,0) \rangle$; como el vector $(0,1,1,1) = (1,0,0,1) + (0,1,1,0) - (1,0,0,0)$, el conjunto generador de $Im(f)$ no es LI; una base de $Im(f)$ es
$B_{Im(f)} = \{(1,0,0,0); (0,1,1,0); (1,0,0,1)\}$; $\dim(Im(f)) = 3$

• Núcleo de f

De $\dim(Im(f)) + \dim(Nu(f)) = \dim(dom(f)) = 4$, $\dim(Nu(f)) = 1$
Como $Nu(f) \subset Nu(g)$ y $Nu(f) \cap Im(g) \neq \{\bar{0}\}$ se busca
$Nu(g) \cap Im(g)$

$Nu(g): \begin{cases} x_2 = x_4 \\ x_3 = x_2 \end{cases}$; $Im(g): \begin{cases} y_1 = y_4 \\ y_2 = y_3 \end{cases}$; luego, si $\bar{z} \in (Nu(g) \cap Im(g))$

$\bar{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z_1, z_1, z_1) = z_1(1,1,1,1)$; una base de $Nu(f)$ es $B_{Nu(f)} = \{(1,1,1,1)\}$
$(1,1,1,1) = \alpha(1,0,0,0) + \beta(0,1,1,1)$; con $\alpha = \beta = 1$, cumpliendose que $Nu(f) \subset Nu(g)$ y que $Nu(f) \cap Im(g) = \langle (1,1,1,1) \rangle \neq \{\bar{0}\}$

• Transformación Lineal f

Se propone una base de $\mathbb{R}^4$, $B = \{(1,1,1,1); (0,1,0,0); (0,0,1,0); (0,0,0,1)\}$
Luego $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 /$
$$\begin{aligned} f(1,1,1,1) &= (0,0,0,0) \\ f(0,1,0,0) &= (1,0,0,0) \\ f(0,0,1,0) &= (0,1,1,0) \\ f(0,0,0,1) &= (1,0,0,1) \end{aligned}$$

3) $B = \{(0,0,1); (1,0,-1); (1,1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$; $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ T.L dada por

$M_{BE}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 6 & -9 & -4 \\ 4 & -5 & -2 \end{pmatrix}$. Decidir si f es diagonalizable.

• Coordenadas de la base canonica de $\mathbb{R}^3$ en base B

$(1,0,0) = \alpha(0,0,1) + \beta(1,0,-1) + \gamma(1,1,0)$

$\begin{cases} \beta + \gamma = 1 \\ \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \beta = 1 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$; $[(1,0,0)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(0,1,0) = \alpha(0,0,1) + \beta(1,0,-1) + \gamma(1,1,0)$

$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 1 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \beta = -1 \\ \gamma = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$; $[(0,1,0)]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(0,0,1) = \alpha(0,0,1) + \beta(1,0,-1) + \gamma(1,1,0)$

$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$; $[(0,0,1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

• Calculo de M_{EE}

$f(1,0,0) = M_{BE}(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$f(0,1,0) = M_{BE}(f) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$f(0,0,1) = M_{EB} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$M_{EE}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 6 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Busca de los autovalores

De $\det(M_{EE}(f) - \lambda \mathbb{I}_{3\times3}) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & -1-\lambda & 6 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot (6) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} (4-\lambda) \cdot$$

↳ Laplace por columna 3

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -6(\lambda-2) + (4-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 =$$

$$= (-1)(\lambda-1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (-1)(\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0; \quad \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2$$

- Calculo de los subespacios caracteristicos

Para $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -3x_1 - 2x_2 + 6x_3 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 - 6x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases}$$

Luego $\bar{x} = (0, 3x_3, x_3) = x_3(0,3,1)$

$$S_{\lambda_1} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 / \bar{x} = \alpha(0,3,1), \alpha \in \mathbb{R}\}; \quad mg_{\lambda_1} = ma_{\lambda_1} = 1$$

Para $\lambda_1 = 1$ coinciden las multiplicidades geométrica y algebraica

Para $\lambda_2 = 2$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 6 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3x_1 - 3x_2 + 6x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$; $x_1 + x_2 - 2x_3$; $x_1 = -x_2 + 2x_3$

$\bar{x} = (-x_2 + 2x_3, x_2, x_3) = x_2(-1, 1, 0) + x_3(2, 0, 1)$

$S_{\lambda_2} = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 / \bar{x} = \alpha(1, -1, 0) + \beta(2, 0, 1), \; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$

$mg_{\lambda_2} = ma_{\lambda_2} = 2$ Coinciden las multiplicidades geométrica y algebraica.

Como para cada autovalor y su respectivo autoespacio asociado, coinciden las multiplicidades algebraica y geométrica, resulta entonces que f es diagonalizable.