1	2	3	4	NOTA
M	/	B	B	5(cinco)

cero

INSCRIPTO EN:

SEDE: C. universitaria	DIAS: Ma - Mi - Vi
HORARIO: 10 - 13	AULA: 11

1.- Sean $\Pi : 2x - 2y + z = 6$ y $\mathbb{L} : X = \lambda(-1, 1, 2) + (2, 1, 0)$. Hallar todas las rectas $\mathbb{L}'$ tales que $\mathbb{L}' \perp \mathbb{L}$, $\mathbb{L}' \cap \mathbb{L} \neq \emptyset$ y $d(P, \Pi) = 4$ para todo $P \in \mathbb{L}'$.

2.- Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ en $\mathbb{R}^{3\times 1}$.
Si $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ son soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$, hallar una solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$ cuya segunda coordenada sea 0.

3.- Sean $\mathbb{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid kx_1 - 2x_3 - x_4 = 0\}$ y $\mathbb{S} = \langle (1, 0, 1, 2), (0, 1, 1, -2) \rangle$. Hallar $k \in \mathbb{R}$ y un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^4$ tales que $\mathbb{S} \oplus \mathbb{T} = \mathbb{H}$ y $\mathbb{S}^\perp \cap \mathbb{T} \neq \{0\}$.

4.- Sean $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0; x_4 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + x_3 = 0; x_4 = 0\}$. Hallar una base B de $\mathbb{R}^4$ que contenga una base de $\mathbb{S}$ y una base de $\mathbb{T}$ y tal que las coordenadas en la base B de todo vector en $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ sean de la forma $(\alpha, 0, 0, 0)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

4- $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 / \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \right\}$ $\quad T = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 / \begin{matrix} x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \right\}$

Hallar una base B de $\mathbb{R}^4$ que contenga a una base de S y una base de T y tal que las coordenadas en la base B de todo vector $S \cap T$ sean de la forma $(a, 0, 0, 0)$ con $a \in \mathbb{R}$.

- Busco $S \cap T$ para hallar base B

$$S \cap T = \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -x_3 \\ x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \rightarrow x_2 = -x_3 = x_1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

(sistema con ambos sistemas)

$(-x_3, -x_3, x_3, 0)$

$\underline{x_3(-1, -1, 1, 0)}$

$\cancel{S \rightarrow x_1 = -x_3 \rightarrow (-x_3, 0, x_3, 0)}$
$\cancel{x_4 = 0 \qquad x_3(-1, 0, 1, 0)}$
$\cancel{T \rightarrow x_2 = -x_3 \qquad (x_1, -x_3, x_3, 0)}$
$\cancel{x_4 = 0}$

$\underline{S \cap T = \lambda(-1, -1, 1, 0)}$ con $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \langle(-1, -1, 1, 0)\rangle$

$(v)_B = (a, 0, 0, 0) \rightarrow \underline{v_1} \cdot a + v_2 \cdot 0 + v_3 \cdot 0 + v_4 \cdot 0 = v$

$a(-1, -1, 1, 0) = v$

- Busco base de S y T

$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 / \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \qquad (-x_3, x_2, x_3, 0)$

$= x_3(-1, 0, 1, 0) + x_2(0, 1, 0, 0)$

$S = \langle(-1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\rangle$ es LI (escalonado)

$T = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 / \begin{matrix} x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = -x_3 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \qquad (x_1, -x_3, x_3, 0)$

$x_3(0, -1, 1, 0) + x_1(1, 0, 0, 0)$

$T = \langle(0, -1, 1, 0), (1, 0, 0, 0)\rangle$ es LI (escalonado)

- Armo B con $S \cap T$ y una base de S y una de T

$$B = \Big\{ \underbrace{(0, 1, 0, 0)}_{S}, \overset{S \cap T}{\overline{(-1, -1, 1, 0)}}, \underbrace{(1, 0, 0, 0)}_{T}, - \Big\}$$

← me falta un generador para que sea base $\mathbb{R}^4$

triangulo para verificar que sea LI (sea base)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ es LI!

$0 \ 0 \ 0 \ 1 \rightarrow$ propongo como generador (es LI)

?

$(S\cap T)_B = (a,0,0,0) \Rightarrow v_1 \cdot a + 0 + 0 + 0 = S\cap T$

$\hookrightarrow S\cap T$

Rta:

$B = \{(-1,-1,1,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1)\}$

Es una de las bases que cumple lo pedido.

③.- $H = \{x \in \mathbb{R}^4 / kx_1 - 2x_3 - x_4 = 0\}$ y $S = \langle (1,0,1,2), (0,1,1,-2) \rangle$

Hallar $k \in \mathbb{R}$ y un subespacio T de $\mathbb{R}^4$ tales que $S \oplus T = H$ y $S^\perp \cap T \neq \{0\}$

• $\dim(H) = 3$ $\quad \dim(H^\perp) = 1$ $\quad$ • $\dim(S) = 2$ $\quad$ • $\dim(S^\perp) = 2$

$S^\perp \Rightarrow \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;/\; \begin{matrix} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 \end{matrix}$

$(-x_3 - 2x_4, -x_3 + 2x_4, x_3, x_4)$

$x_3(-1,-1,1,0) + x_4(-2,2,0,1)$

$S^\perp = \langle (-1,-1,1,0), (-2,2,0,1) \rangle$

• $S \oplus T = H \rightarrow S \cap T = \{0\}$

$\dim(S) + \dim(T) - \dim(S\cap T) = \dim(S+T)$

$2 \qquad 1 \qquad 0 \qquad 3$

H

$S \subset H \quad S+T \subset H$

$T \subset H$

• $\dim(T) = 1$, $\quad T \subset H$, $\quad S^\perp \cap T \neq \{0\}$, $\quad S \cap T = \{0\}$

$T \subset S^\perp$ pues $\dim(T) = 1$ y $S^\perp \cap T \neq \{0\}$.

$T \Rightarrow H \cap S^\perp$ $\qquad$ • $T \Rightarrow H + S^\perp$

$v \in H \cap S^\perp \rightarrow v \in S^\perp \rightarrow a(-1,-1,1,0) + b(-2,2,0,1)$

$(-a-2b, -a+2b, a, b)$

$\rightarrow v \in H \rightarrow 4.(-a-2b) - 2a - b$

$-4a - 8b - 2a - b$

$-6a - 9b$

$-6a = 9b$

$a = 9/-6\, b$

$a = -3/2\, b$

$\left(\frac{3}{2}b - 2b, \frac{3}{2}b + 2b, -\frac{3}{2}b, b\right)$

$\left(-\frac{1}{2}b, \frac{7}{2}b, -\frac{3}{2}b, b\right)$.

$b\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$

NOTA

$S \oplus T = H \Rightarrow S \subseteq H$

↳ reemplazo en ecuacion

$$k \cdot 1 - 2 - 2 = 0$$

$$\boxed{k = 4}$$

$\therefore$ respuesta:

$$T = \langle (-1/2, 7/2, -3/2, 1) \rangle = T \langle (-1, 7, -3, 2) \rangle$$