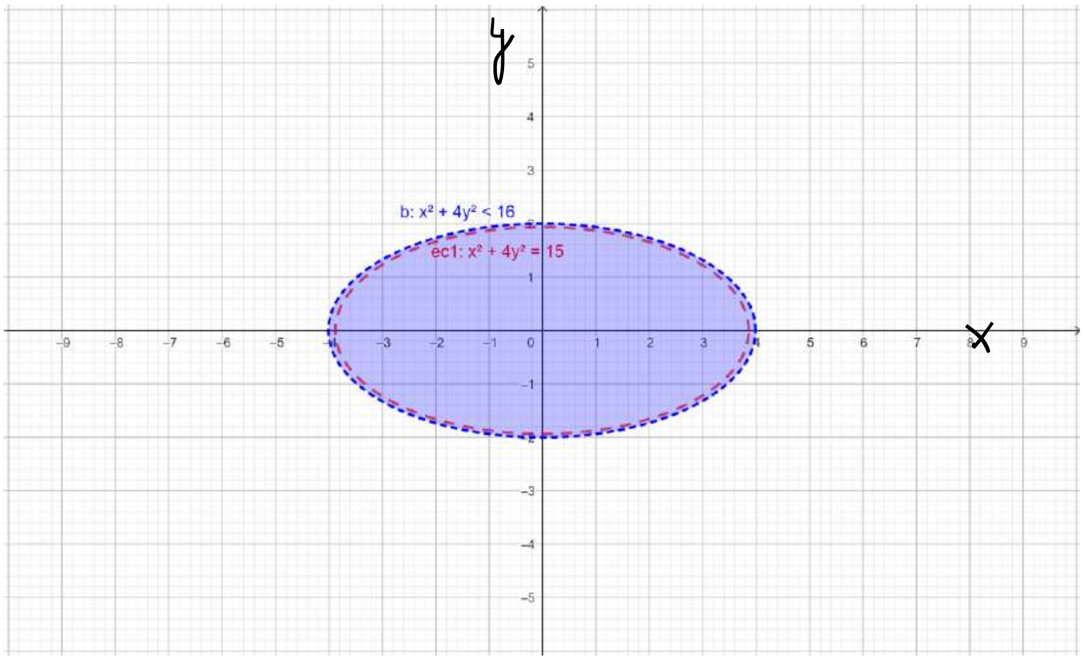
Respuestas Primer Parcial

TEMA A

EJERCICIO 1

a) Dada la siguiente función, determinar analítica y gráficamente el dominio: $\boldsymbol{f(x,y)} = \frac{\boldsymbol{3x}}{\boldsymbol{ln(16-x^2-4y^2)}}$

$$Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 4y^2 \neq 15 \wedge x^2 + 4y^2 < 16\}$$



b) Dada la siguiente función, calcular, si existe, el límite doble en los siguientes puntos: $P_0 = (0;0)$ y $P_1 = (1;2)$

$$\boldsymbol{h(x,y)} = \frac{\boldsymbol{x^2 + y^2 + 3x}}{\boldsymbol{x+y}}$$

En $P_0 = (0;0)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} \frac{\boldsymbol{x^2+y^2+3x}}{\boldsymbol{x+y}} = \boldsymbol{No\ existe}.$ Justificación: $L_1 \neq L_2$ y $L_R = f(m)$.

En $P_1 = (1;2)$: $\lim\limits_{(x,y)\to(1;2)} \frac{\boldsymbol{x^2+y^2+3x}}{\boldsymbol{x+y}} = \boldsymbol{8/3}$

EJERCICIO 2

a) Dada la función $\boldsymbol{f(x,y)} = \sqrt{\boldsymbol{5x^2 + y^2}}$. Determinar si la función es diferenciable en el origen.

No es diferenciable en el origen porque no existen las derivadas parciales en ese punto.

b) Dada la $\boldsymbol{f(x,y)} = \sqrt{\boldsymbol{(3x^2 - x)y + 3^y}}$ hallar el valor de la derivada máxima en $P = (0;1)$.

$$\|\nabla f(0;1)\| = +\sqrt{f_x(0;1)^2 + f_y(0;1)^2}$$

$$f_x(0;1) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ y } f_y(0;1) = \frac{3\ln(3)}{2\sqrt{3}}$$

EJERCICIO 3

Dada la siguiente función de producción $\boldsymbol{P(L,K)} = \sqrt{\boldsymbol{K}}\,\boldsymbol{L^{1/a}}$ donde $\boldsymbol{a > 0}$

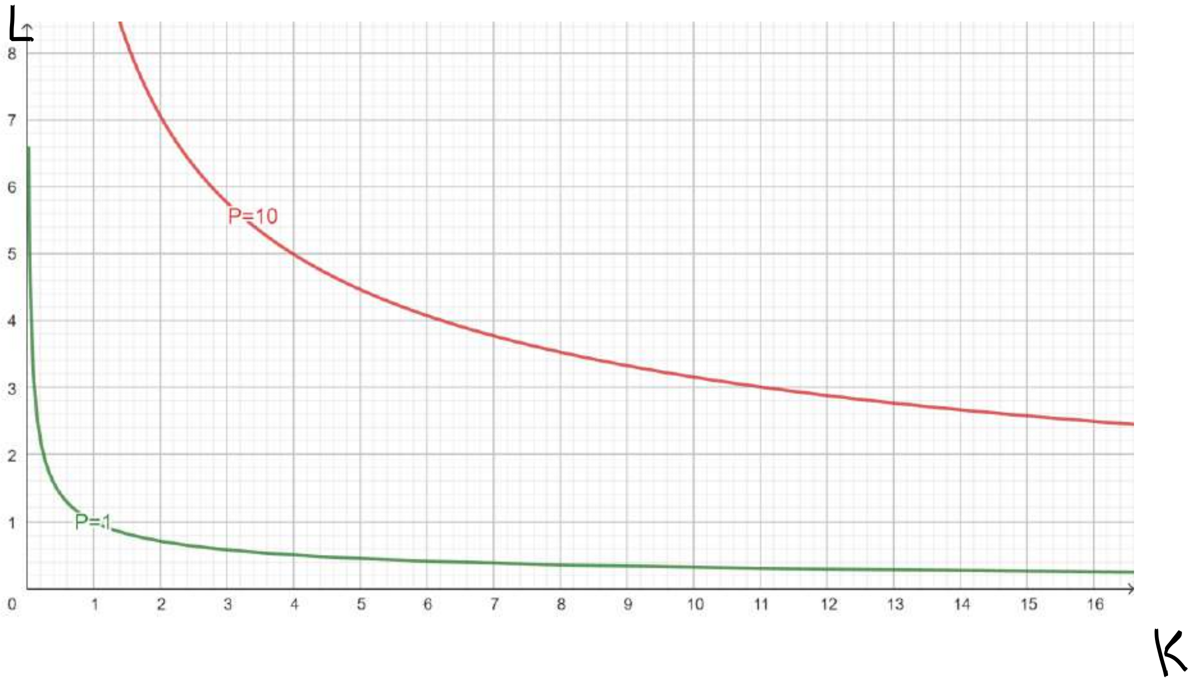
a. Demostrar que la función de producción es homogénea; y establecer para que valores de a la función presenta un rendimiento a escala decreciente.

$$P(\lambda L, \lambda K) = \lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{a}}\sqrt{K}\,L^{1/a} \qquad n = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}$$

Presenta rendimientos decrecientes para $a > 2$

b. Considerar $\underline{a = 1.}$ Graficar las curvas de nivel de la función de producción para $P = 1$ y $P = 10$. ¿La función de producción dada es una función normal? Hallar la $TST(K/L)$ e interpretar económicamente el resultado.

$$TST\left(\frac{K}{L}\right) = -\frac{2K}{L}$$



Las curvas corresponden al caso normal

EJERCICIO 4

Dada la ecuación: $\mathbf{16D^2 - D - 80 + (3p_x - 5p_y)^2 + p_x{}^2 = 0}$ que define implícitamente a la demanda en función de los precios, $D = f(p_x, p_y)$, en el entorno del punto $P_0 = (p_{x0}, p_{y0}, D_0)$.

a) Hallar la elasticidad de la demanda, D, con respecto al precio, p_x, en el punto P_0. Clasificar el tipo de elasticidad y dar la interpretación económica del resultado.

$$\frac{ED}{Ep_x} = \frac{p_{x0}}{D_0} \cdot \frac{(30p_{y0} - 20p_{x0})}{32D_0 - 1}$$

b) Hallar la demanda marginal con respecto al precio, p_y, en el punto P_0. Clasificar el bien y dar la interpretación económica del resultado.

$$\frac{\partial D}{\partial p_y} = \frac{(30p_{x0} - 50p_{y0})}{32D_0 - 1}$$

EJERCICIO 5

Si $\mathbf{z = y \cdot sen(3x - 1)}$ donde x e y están definidas por el sistema $\begin{cases} \mathbf{x^2 + y^2 = t(x-1)} \\ \mathbf{2x - 3y = e^t} \end{cases}$

a. Expresar $d^2z(x, y)$.

$d^2z = -9y \cdot sen(3x - 1)\,(dx)^2 + 6 \cdot \cos(3x - 1)\,dxdy + 0 \cdot (dy)^2$

b. Hallar $\frac{dz}{dt}$.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{-6x + 3t - 4y}[(-3x + 3 - 2ye^t)3y\cos(3x - 1) + (2xe^t - te^t - 2x + 2)sen(3x - 1)]$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Donde: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3y * \cos(3x-1)$ $\frac{\partial z}{\partial y} = sen(3x-1)$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-3(x-1) - 2ye^t}{(2x-t)(-3) - 4y} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{(2x-t)e^t - 2(x-1)}{(2x-t)(-3) - 4y}$$

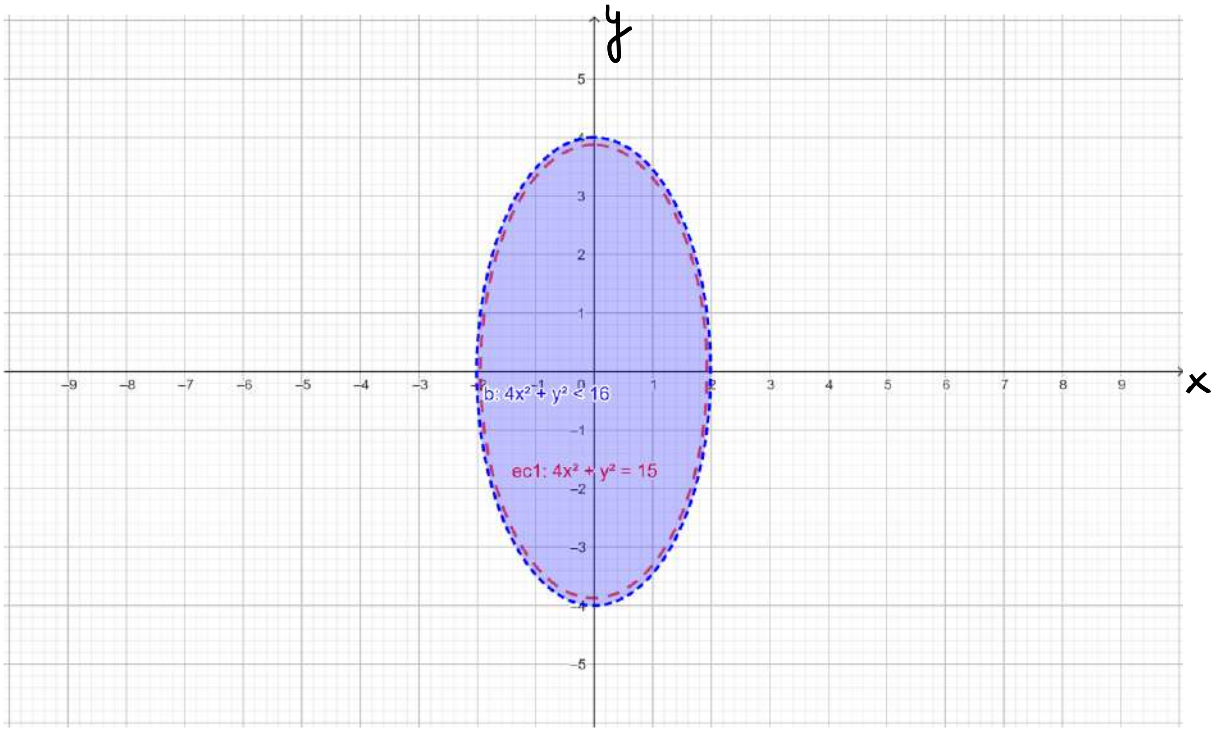
TEMA B

EJERCICIO 1

a) Dada la siguiente función, determinar analítica y gráficamente el dominio:

$$\boldsymbol{f(x,y) = \frac{3y}{ln(16-4x^2-y^2)}}$$

$Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4x^2 + y^2 \neq 15 \wedge 4x^2 + y^2 < 16\}$



b) Dada la siguiente función, calcular, si existe, el límite doble en los siguientes puntos: $P_0 = (0;0)$ y $P_1 = (2;1)$

$$\boldsymbol{h(x,y) = \frac{x^2 + y^2 + 3x}{x+y}}$$

En $P_0 = (0;0)$ no existe el límite Justificación: $L_1 \neq L_2$ y $L_R = f(m)$..

En $P_1 = (2;1)$ el límite vale $\frac{11}{3}$.

EJERCICIO 2

c) Dada la función $\boldsymbol{f(x,y) = \sqrt{x^2+3y^2}}$. Determinar si la función es diferenciable en el origen.

No es diferenciable en el origen porque no existen las derivadas parciales en ese punto.

d) Dada la $\mathbf{f(x,y) = \sqrt{(3x^2-x)y + 3^y}}$. Hallar el valor de la derivada minima en el punto $P = (0;-1)$.

$$\|\nabla f(0;1)\| = +\sqrt{f_x(0;-1)^2 + f_y(0;-1)^2}$$

$$f_x(0;-1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ y } f_y(0;-1) = \frac{\ln(3)}{2\sqrt{3}}$$

EJERCICIO 3

Dada la siguiente función de producción $\boldsymbol{P(L,K) = \sqrt{K}\, L^{1/a}}$ donde $\boldsymbol{a > 0}$

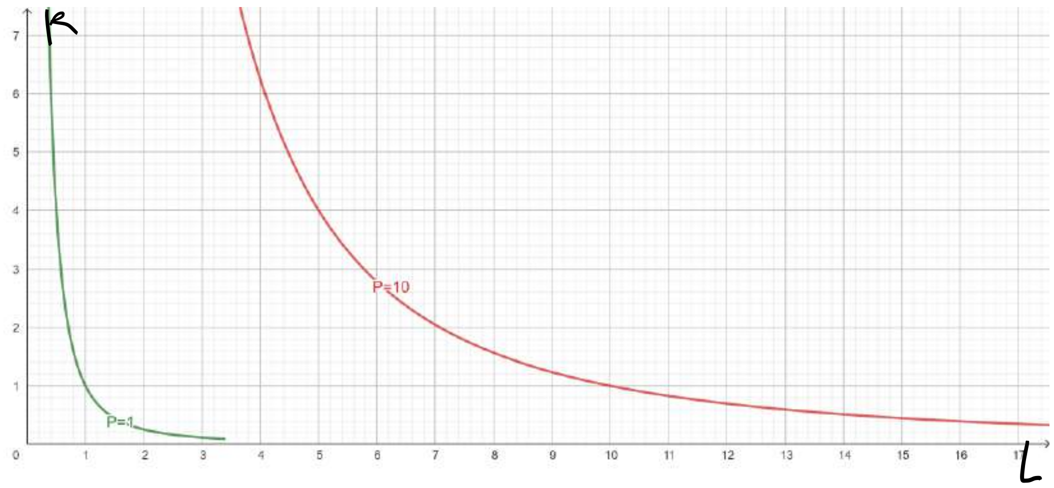
a) Demostrar que la función de producción es homogénea; y establecer para que valores de a la función presenta un rendimiento a escala creciente.

$$P(\lambda L, \lambda K) = \lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{a}} \sqrt{K}\, L^{1/a} \qquad n = \frac{1}{2} + \frac{1}{a}$$

Presenta rendimientos crecientes para $a < 2$

b) Considerar $a = 2$. Graficar las curvas de nivel de la función de producción para $P = 1$ y $P = 10$. ¿La función de producción dada es una función normal? Hallar la $TST(L/K)$ e interpretar económicamente el resultado.

$$TST(L/K) = \frac{L}{K}$$



Las curvas corresponden al caso normal

EJERCICIO 4

Dada la ecuación: $\mathbf{16D^2 - D - 80 + (3p_x - 5p_y)^2 + p_x{}^2 = 0}$ que define implícitamente a la demanda en función de los precios, $D = f(p_x, p_y)$, en el entorno del punto $P_0 = (p_{x0}, p_{y0}, D_0)$.

a) Hallar la elasticidad de la demanda, D, con respecto al precio, p_y, en el punto P_0. Clasificar el tipo de elasticidad y dar la interpretación económica del resultado.

$$\frac{ED}{Ep_y} = \frac{p_{y0}}{D_0} \cdot \frac{(30p_{x0} - 50p_{y0})}{32D_0 - 1}$$

b) Hallar la demanda marginal con respecto al precio, p_x, en el punto P_0. Clasificar el bien y dar la interpretación económica del resultado.

$$\frac{\partial D}{\partial p_x} = \frac{(30p_{y0} - 20p_{x0})}{32D_0 - 1}$$

EJERCICIO 5

Si $\mathbf{z = y \cdot \cos(2x)}$ donde x e y están definidas por el sistema $\begin{cases} \mathbf{2x - 3y = e^t} \\ \mathbf{x^2 + y^2 = tx} \end{cases}$

a) Expresar $d^2 z(x, y)$

$$d^2 z = -4y \cdot cos(2x)\,(dx)^2 - 4 \cdot \text{sen}(2x)\, dxdy + 0 \cdot (dy)^2$$

b) Hallar $\frac{dz}{dt}$.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{4y + 6x - 3t}[-(2ye^t + 3x)2ysen(2x) + (2x - 2xe^t + te^t)cos(2x)]$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Donde: $\frac{\partial z}{\partial x} = -2y\,\mathrm{sen}(2x)$ $\frac{\partial z}{\partial y} = cos(2x)$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2ye^t + 3x}{4y + 6x - 3t} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{2x - 2xe^t + te^t}{4y + 6x - 3t}$$

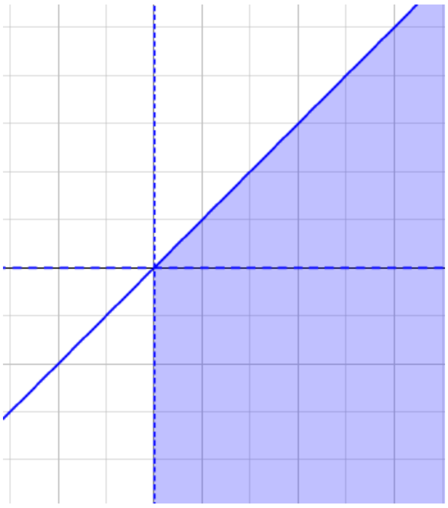
TEMA 3

EJERCICIO 1

Dada la siguiente función: $f(x,y) = \sqrt{x-y} + 8\ln\left(\frac{3x}{y^2}\right)$

a) Determinar y graficar el dominio de la función. Indicar y justificar si el dominio es un conjunto convexo.

$$\boldsymbol{Df = \{(x,\ y) \in \mathcal{R}^2 / x - y \geq 0 \quad \wedge \quad x > 0 \wedge y \neq 0\}}$$



b) Calcular el valor MINIMO de la derivada direccional de la función $f(x,y)$ en el punto $P = (2{,}1)$.

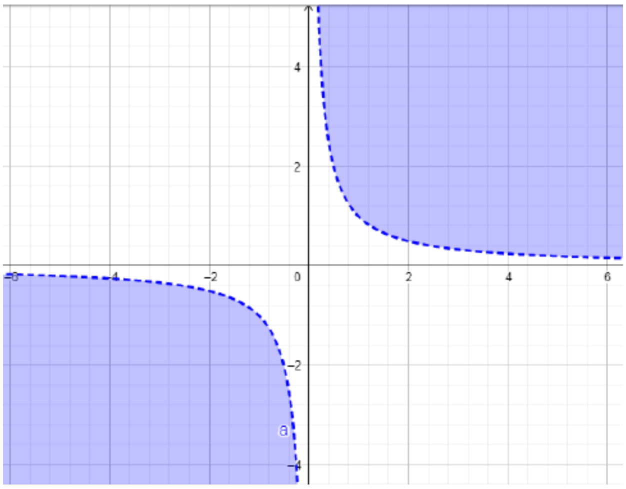
$$D_{\vec{u}\ mínima}(2,\ 1) = -\|\nabla f(2;1)\| = -\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-33}{2}\right)^2} = -\frac{585}{2}$$

$$f'_x(x;y) = \frac{1}{2\sqrt{x-y}} + \frac{8y^2}{x} \qquad f'_y(x;y) = \frac{-1}{2\sqrt{x-y}} - \frac{16}{y}$$

Dada la siguiente función: $f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{\ln(xy)}}$

a) Determinar y graficar el dominio de la función. Indicar y justificar si el dominio es un conjunto compacto.

$$Df = \{(x,\ y) \in \mathcal{R}^2 / xy > 1\}$$



b) Calcular el valor MAXIMO de la derivada direccional de la función $f(x, y)$ en el punto $P = (2,2)$.

$$f_x'(x_0; y_0) = \frac{\sqrt{\ln(xy)} - \frac{x-y}{2x\sqrt{\ln(xy)}}}{\ln(xy)} \qquad f_y'(x_0; y_0) = \frac{-\sqrt{\ln(xy)} - \frac{x-y}{2y\sqrt{\ln(xy)}}}{\ln(xy)}$$

$$D_{\vec{u}máx}(2,\ 2) = \|\nabla f(2; 2)\| = 0{,}73$$

EJERCICIO 2

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando las respuestas:

a.1) Si existe el límite doble de la función $f(x,\ y)$ en el punto de acumulación de su dominio $(x_0,\ y_0)$, entonces es continua en $(x_0,\ y_0)$. Falso.

Además que exista el Ld, necesito que exista la imagen y que coincidan.

$$\lim_{(x,\ y)\to(x_0, y_0)} f(x,\ y) = f(x_0, y_0)$$

a.2) Si $f(x,\ y)$ es diferenciable en $(x_0,\ y_0)$ interior a su dominio, entonces f tiene derivadas parciales en $(x_0,\ y_0)$. Verdadero.

Lo probamos por Teorema de Diferenciable entonces existen derivadas parciales. (el desarrollo se encuentra en el PDF de diferenciabilidad).

b.1) Si los límites sucesivos son iguales, entonces se puede asegurar que el límite doble existe. Falso.

No puedo asegurar existencia de Ld si L1=L2.

b.2) Si $f(x,\ y)$ es homogénea de grado m, la TST(y/x) es una función que presenta un rendimiento a escala constante. Falso.

Como f(x, y) es homogénea de grado m, las Pmgx y Pmgy son homogéneas de grado m-1. Por ende, el cociente de dos funciones homogéneas, es una función homogénea y en este caso de grado (m-1)-(m-1). Por lo tanto, la TST es una función homogénea de grado 0. El análisis de rendimientos a escala se realiza sobre las funciones de producción, no sobre las pendientes de las curvas isocuantas.

a.1) Si existe el límite doble de la función $f(x,\ y)$ en el punto de acumulación de su dominio $(x_0,\ y_0)$, entonces es continua en $(x_0,\ y_0)$. Falso.

Además que exista el Ld, necesito que exista la imagen y que coincidan.

$$\lim_{(x,\ y)\to(x_0, y_0)} f(x,\ y) = f(x_0, y_0)$$

a.2) Si $f(x,\ y)$ es diferenciable en $(x_0,\ y_0)$ interior a su dominio, entonces f es continua en $(x_0,\ y_0)$. Verdadero.

Lo probamos por Teorema de Diferenciable entonces continua.

b.1) Si los límites sucesivos y los radiales son iguales, entonces el límite doble existe. Falso.

No puedo asegurar existencia de Ld si L1=L2=Lr.

b.2) Si $f(x,\ y)$ es homogénea de grado m, la TST(y/x) es invariante frente a cambios proporcionales en x e y. Verdadero.

Si f(x, y) es homogénea de grado m, las Pmgx y Pmgy son homogéneas de grado m-1. Por ende, el cociente de dos funciones homogéneas, es una función homogénea y en este caso de grado (m-1)-(m-1). Por ende, la TST es homogénea de grado 0.

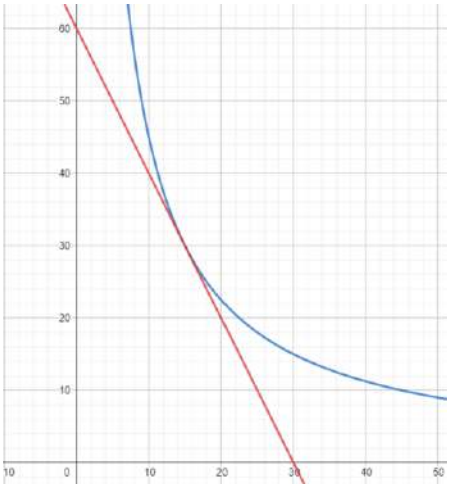
EJERCICIO 3

a) Una empresa fabrica un producto combinando dos factores productivos según la función de producción $Q = 6xy$ donde x e y son las cantidades empleadas de cada factor. Los precios de los factores son $p_x = 20$ y $p_y = 10$. El costo fijo es 100.

Hallar la máxima producción que se puede lograr con un $costo\ total\ = 700$. Graficar esquemáticamente la situación óptima.

$$Max \quad 6xy \qquad\qquad\qquad s.a. \quad 20x + 10y = 600$$

La máxima producción se logra cuando se utilizan 15 unidades de x y 30 unidades de y.



b) Determinar si la función $z = \sqrt[4]{x^4 + y}$ es diferenciable en el origen.

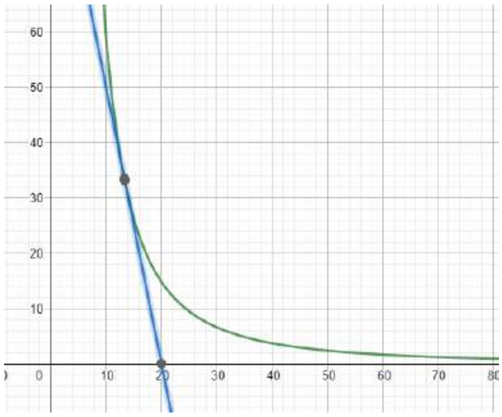
Como no existe $f'_x(0,0)$ se puede asegurar que la función no es diferenciable en el origen.

a) Un consumidor expresa sus preferencias a partir de la siguiente función de utilidad $U = x_1^2 x_2$ donde x_1 y x_2 las cantidades consumidas de los bienes 1 y 2. Los precios de cada bien son $p_1 = 50$ y $p_2 = 10$ y dispone de $1000.

Hallar la máxima utilidad que se puede lograr con el dinero disponible, si el consumidor decide gastarlo todo. Graficar esquemáticamente la situación óptima.

Máx $U = x_1^2 x_2$ s.a. $1000 = 50x_1 + 10x_2$

$\rightarrow$ existe máximo en $(x_1, x_2) = (13{,}3,\ 33{,}5)$ y $U_{MAX} = 5925{,}81$



b) Determinar si la función $z = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,\ y) \neq (0{,}0) \\ 1 & (x,\ y) = (0{,}0) \end{cases}$ es diferenciable en el origen.

La función presenta una discontinuidad evitable en P_0

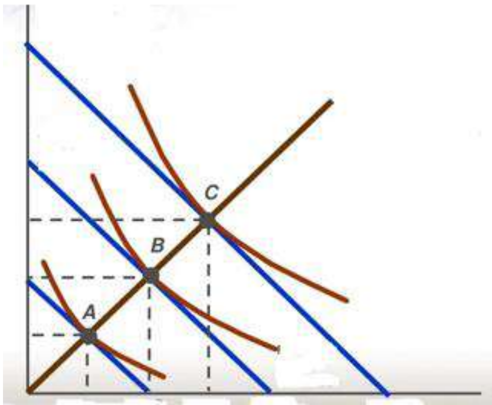
No diferenciable en el origen

EJERCICIO 4

Dada la función de utilidad $U = A.\ x_1^{\alpha}.x_2^{\beta}$. Donde: $0 < \alpha < 1,\ \beta > 0,\ A > 0.$ x_1 y $x_2$representan las cantidades de consumidas. Siendo los precios estos bienes $p_1 = 2$ y $p_2 = 6$.

a) Hallar la ecuación de la trayectoria de expansión e indicar su significado económico. Graficar esquemáticamente

$$x_2 = \frac{\beta x_1}{3\alpha}$$



b) ¿Cuál es el valor de la suma de las elasticidades parciales? Desarrolle los cálculos realizados.

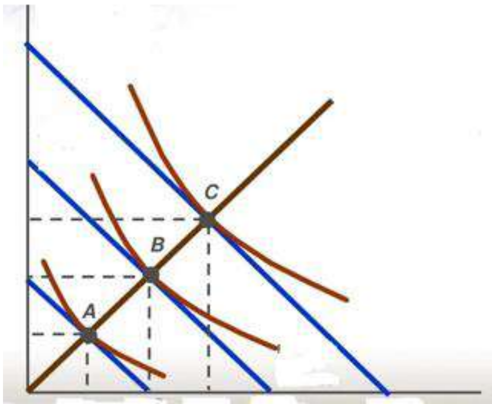
Por teorema de Euler:

$$U'_{x_1}x_1 + U'_{x_2}x_2 = (\alpha+\beta)U \quad \rightarrow \quad \varepsilon(U/x_1) + \varepsilon(U/x_2) = \alpha+\beta$$

Dada la función de producción $q = 8.\ x_1^{\alpha}.x_2^{1-\alpha}$. Donde: $0 < \alpha < 1,$ x_1 y $x_2$representan las cantidades de los insumos utilizados. Siendo los precios estos insumos $p_1 = 1$ y $p_2 = 5$

a) Hallar la ecuación de la trayectoria de expansión e indicar su significado económico. Graficar esquemáticamente.

$$x_1 = \frac{5\ \alpha}{(1-\alpha)}\ x_2$$



b) ¿Cuál es el valor de la suma de las elasticidades parciales de producción? Desarrolle los cálculos realizados.

Por teorema de Euler:

$$Pmgx_1.x_1 + Pmgx_2.x_2 = q \quad \rightarrow Pmgx_1.\frac{x_1}{q} + Pmgx_2.\ \frac{x_2}{q} = 1 \quad \rightarrow \quad \varepsilon(q/x_1) + \varepsilon(q/x_2) = 1$$

EJERCICIO 5

Dada la siguiente función de utilidad $U(x_1,\ x_2) = x_1^2 x_2$ en donde $x_1 = f(t)$ y $x_2 = g(t)$ están definidos por el sistema $\begin{cases} x_1 x_2 = t^2 + 1 \\ x_1^3 + \sqrt{x_2\, x_1} = 3t \end{cases}$. Calcular:

a) Calcular la utilidad marginal con respecto a x_2. Interpretar el resultado.

$$U'_{x_2} = x_1^2$$

b) Calcular el dU/dt para $t = 1$. ¿Cuál es la tendencia?

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 2x_1 x_{2=4} \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = x_1^2 = 1.35$$

$$\frac{dx_1}{dt}_{t=1} = \frac{2\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}-3\right)-3x_1}{x_2\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}-3\right)-x_1\left(3x_1^2+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\right)} = 0.89 \qquad \frac{dx_2}{dt}_{t=1} = \frac{3x_2-2\left(3x_1^2+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\right)}{x_2\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}-3\right)-x_1\left(3x_1^2+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\right)} = 0.48$$

Dada la siguiente función de producción $P(K,\ L) = K^{1/3}L^{2/3}$ en donde $K = f(t)$ y $L = g(t)$ están definidos por el sistema $\begin{cases} K/L = t^3 \\ K + L^2 = 2t \end{cases}$. Calcular:

a) Elasticidades de producción. Interpretar los resultados.

$\varepsilon(P/K) = 1/3 \rightarrow$ inelástico

$\varepsilon(P/L) = 2/3 \rightarrow$ inelástico

b) Calcular el dP/dt para $t = 1$. ¿Cuál es la tendencia?

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial P}{\partial L}\frac{dL}{dt}$$

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \frac{1}{3}K^{-2/3}L^{2/3} \qquad \frac{\partial P}{\partial L} = \frac{2}{3}K^{1/3}L^{-1/3}$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{6t^2L+\frac{K}{L^2}}{2+\frac{K}{L^2}} \qquad \frac{dL}{dt} = \frac{\frac{2}{L}+3t^2}{2+\frac{K}{L^2}}$$

Para $t_0 = 1 \rightarrow$ $L_0 = 1$ y $K_0 = 1$

$$\left.\frac{dK}{dt}\right|_{(K,L,t)=(1,\,1,\,1)} = 7/3 \qquad \left.\frac{dL}{dt}\right|_{(K,L,t)=(1,\,1,\,1)} = 5/3$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial K}\right|_{(K,L)=(1,\,1)} = \frac{1}{3} \qquad \left.\frac{\partial P}{\partial L}\right|_{(K,L)=(1,\,1)} = \frac{2}{3}$$