TRABAJO PRÁCTICO N°3:

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD MÁS IMPORTANTES

Ejercicio 3.1

Para estudiar la regulación hormonal de una línea metabólica se inyectan ratas con un fármaco que inhibe la síntesis de proteínas del organismo. En general, 4 de cada 20 ratas mueren a causa del fármaco antes de que el experimento haya concluido.
Si se trata a 6 animales con el fármaco:

a)¿ Cuál es la probabilidad de que al final del experimento hayan muerto 2 o menos?

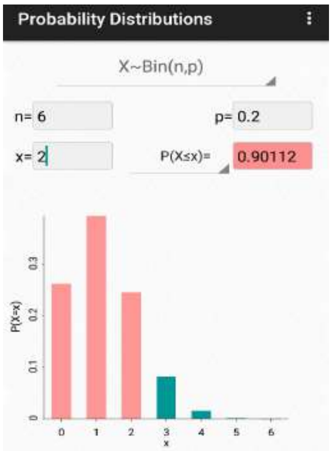
Planteamos la variable aleatoria

X= número de ratas que mueren (por el fármaco) de un total de 6

X ~ Bi(m; p)
m es la cantidad de ratas que sometimos al experimento.
p es la probabilidad de éxito en cada una de las ratas (tomaremos como existo a la muerte del animal)

X~Bi(6; 4/20)

P(X≤2) = $F_x(2)$ ya que la podemos calcular como una probabilidad acumulada
P(X≤2) = $F_x(2)$ = 0,9011
Utilizando la aplicación:



b)¿ Cuál es la probabilidad de que al final sobrevivan las 6?

Para ello debemos plantear una nueva v.a. ya que el anterior era en base al número de ratas muertas.

Y= número de ratas que sobreviven de un total de 6
Y~Bi(6; 0,8)

p_y proviene de uno menos la probabilidad del fracaso (que antes llamamos probabilidad de éxito)
P_y = 1 - 0,2 = 0,8

$P(Y=6) = 0,2621$ buscamos en la tabla de probabilidades binomiales (Tabla 1)

c)¿Cuál es el número esperado de ratas vivas al final del experimento si se tratan 12 en total?

Planteamos v.a.

Z= número de ratas que están vivas en un total de 12

$Z \sim Bi(12; 0,8)$

La probabilidad será la misma que en el punto B) ya que es en base a la supervivencia

Lo que nos pide en este caso, es calcular la esperanza, siendo $E(x) = m \times p$

Entonces:

$E(z) = m \times p = 12 \times 0,8 = 9,6$

Ejercicio 3.2

Se sabe que un medicamento es efectivo en el 90% de los casos.

a)¿Qué probabilidad hay de que al aplicarlo a 20 pacientes se curen 17?

X = número de pacientes citados de un total de 20

$X \sim Bi(20; 0,9)$

$P(X=17) = 0,1910$ Siendo **m**: 20, **k**: 17, **p: 0,9**

b) ¿Y de que se curen 17 o más?

$P(X \geq 17) = 1 - P(X \leq 16) = 1 - 0,1330 = 0,8670$

Ejercicio 3.3

Se comprobó experimentalmente que la radiación genera deficiencia genética en el 10% de la población sometida.

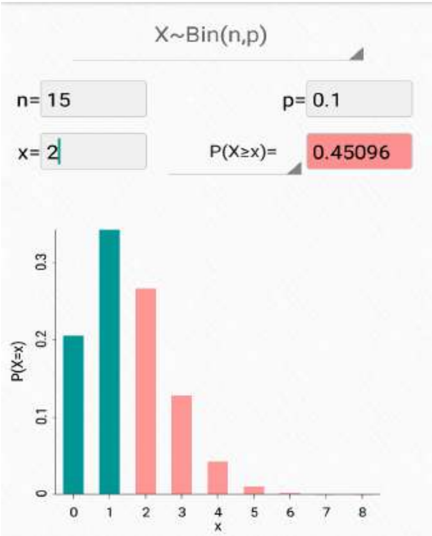
a)¿Cuál es la probabilidad que, de 15 personas afectadas por la radiación, se produzca deficiencia genética en 2 o más?

X= número de personas con deficiencia genética de un total de 15

$X \sim Bi(15; 0,1)$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0,5490 = 0,451$

Calculado con la aplicación:



b)¿Y de que se presente deficiencia en exactamente 5?

P(X=5) = 0,0105

Ejercicio 3.4

El número de enfermos recuperados después de cierto tiempo de aplicado un tratamiento a 10 pacientes, es una variable aleatoria binomial con esperanza 7.
Se aplica el tratamiento a 10 enfermos, calcular:

a)La probabilidad de que se recuperen por lo menos 6 pacientes.

X= número de enfermos recuperados de un total de 10

X~Bi(10; p) para hallar **p** nos dan como dato E(x) = 7
E(x) = m×p → p = 0,7

X~Bi(10; 0,7)

P(X≥6) = 1 - P(X≤5) = 1 - 0,1503 = 0,8497

b) La varianza de la variable aleatoria Var(x)= m ·p ·(1 - p) *siendo (1- p) = q*

Var(x)= 10 · 0,7 ·(1 - 0,7) = 10·0,7·0,3 = 2,1

c) El número esperado de pacientes que se recuperan si se aplica el tratamiento a 20 pacientes.

para ello debemos redefinir la variable aleatoria:

Y = número de pacientes recuperados en un total de 20

Y ~Bi(20; 0,7)

E(Y) = m·p = 20·0,7 = 14

Ejercicio 3.5:

En una población se ha observado que el número de muertes por falla cardiaca sigue una distribución de Poisson con un promedio anual de 7.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, durante el año en curso, en dicha población mueren 4 personas por falla cardiaca?

X = Número de muertos por falla cardiaca en 1 año
$X \sim P(\lambda_x)$ *siendo* λ_x=7

P(X=4) = 0,0912
Tabla 3: Probabilidades de Poisson k=4 y λ=7

b) ¿Y de que mueran menos de 6?

P(X<6) lo podemos calcular conociendo el recorrido de la variable R_x={0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7...}

P(X<6)= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)
P(X<6)= 0,0009 + 0,0064 + 0,0223 + 0,0521 + 0,0912 + 0,1277
P(X<6)= 0,3006

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en los próximos 6 meses en dicha población hayan muerto 3 personas por falla cardiaca?

Redefinimos la nueva variable aleatoria
Y = número de muertos por falla cardiaca en 6 meses
$Y \sim P(\lambda_Y)$ en 12 meses ------------ promedio de 7 muertes
6 meses ----------- x: 3,5
Y~P(3,5)
P(Y=3) = 0,2158

Ejercicio 3.6:

Una suspensión de bacterias tiene una densidad de 0,4 bacterias por cm^3. El número de dichas bacterias en un volumen puede asumirse que sigue una distribución de Poisson.
Si se considera un volumen de 6 cm3
a) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar menos de 2 bacterias?

X = número de bacterias en un volumen de $6cm^3$
$X \sim P(\lambda_x) \Rightarrow \lambda=\delta \cdot V \Rightarrow 0{,}4 \cdot 6 = 2{,}4$ tiene las mismas unidades que X

P(X<2) = P(X=0) + P(X=1) = 0,0907 + 0,2177 = 0,3084

b) ¿Cuál es el número esperado de bacterias en dicho volumen? ¿Y en un volumen de 15 cm^3?
Redefinimos la v.a.
Y = número de bacterias en un volumen de $15cm^3$
$Y \sim P(\lambda_Y) \Rightarrow \lambda=\delta \cdot V \Rightarrow 0{,}4 \cdot 15 = 6 \Rightarrow Y \sim P(6)$
E(x) = λ = 6

Ejercicio 3.7:

pipiMorch

Una sustancia radioactiva emite partículas alfa. El número de partículas que llegan a cierta región del espacio en un intervalo de 7,2 segundos es una variable aleatoria que obedece a la ley de Poisson con esperanza 4.

a) Calcular la probabilidad de que en un intervalo de 9 segundos lleguen a lo sumo 2 partículas.

X = número de partículas que llegan al espacio en 7,2 seg

$X \sim P(\lambda_x)$ siendo $\lambda_x = 4$ ya que $\lambda = E(x_p) = Var(x_p)$

$P(X \leq 2) =$ 0,2381
$\lambda = 4$
$k = 2$

b) Hallar la probabilidad de que en un intervalo de 9 segundos lleguen por lo menos 4 partículas.

Y = número de partículas que llegan al espacio en 9 seg
$Y \sim P(5)$

7,2 seg — promedio de 4 partículas
9 seg — x= promedio de 5 partículas

$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0{,}2650 =$ 0,735

Ejercicio 3.8:

En cierta etapa de un proceso de producción de una vacuna ésta puede contener virus vivos. Se quiere realizar el control de seguridad de la vacuna para verificar que el proceso de producción funciona correctamente, por lo que se establece el siguiente método de control: de un matraz que contiene un gran volumen de la vacuna se toma una muestra de un pequeño volumen v y si la muestra no contiene virus, se concluye que el contenido total del matraz tampoco los tiene. Considerando un matraz que contiene 5 virus vivos por cada 1000 cm3, y tomando como volumen de control v = 600 cm3. ¿Cuál es la probabilidad de concluir que el matraz no contiene virus, o sea, de que el procedimiento de control falle?

X = número de virus vivos en 600 cm^3
$X \sim P(\lambda_x)$

Si en un volumen de 1000 cm^3 — 5 virus vivos
en 600 cm^3 — x= 3 virus vivos
Entonces $X \sim P(3)$

Probabilidad de que el procedimiento de control falle $P(X=0) =$ 0,0498

Ejercicio 3.9:

Sea Z una variable aleatoria con distribución N(0;1). Calcular, mediante la tabla:

a) $P(Z \leq 1{,}7)$ $= F(1{,}7) =$ 0,9554

b) $P(Z > 2{,}03)$ $= 1 - P(Z < 2{,}03) = 1 - F(2{,}03) = 1 - 0{,}9788 =$ 0,0212

c) P(Z > -1,34) = F(1,34) = 0,9099

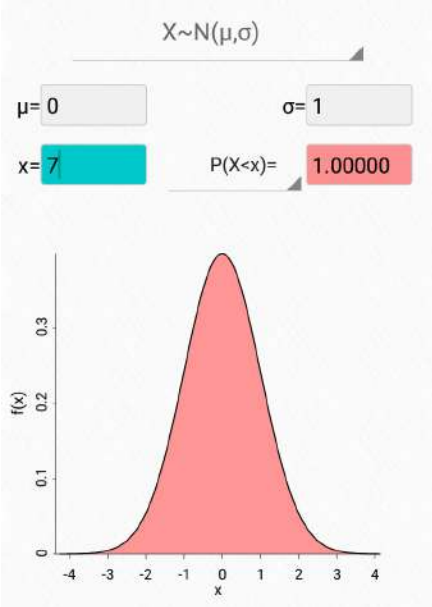
d) P(Z < -2,2) = P(Z > 2,2) = 1 - P(Z< 2,2) = 1 - F(2,2) = 1 - 0,9861 = 0,0139

e) P(0,2 < Z <1,4) = F(1,4) - F(0,2) = 0,9192 - 0,5793 = 0,3399

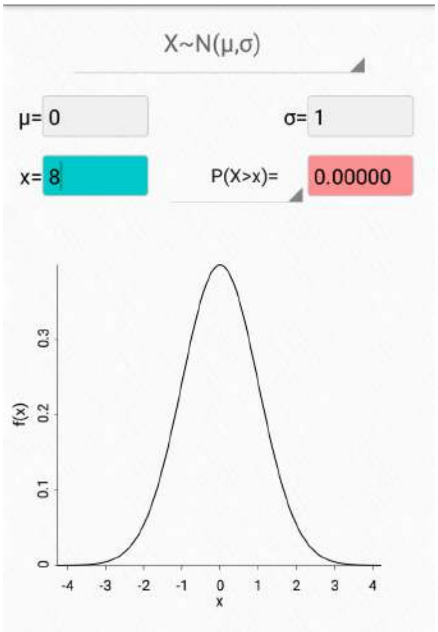
f) P(-1,3 < Z < -0,5) = F(1,3) - F(0,5) = 0,9032 - 0,6915 = 0,2117

g) P(-0,38 < Z ≤ 2,94) = aplicamos **P(-a ≤ Z ≤ b) = F(a) + F(b) - 1**
P(-0,38 < Z ≤ 2,94) = F(0,38) + F(2,94) - 1 = 0,6480 + 0,9984 - 1 = 0,6464

h) P(Z ≤ 7) = 1 ya que el área debajo de la curva (todo lo acumulado ≤7) es 1



i) P(Z > 8) = 0 ya que la región es prácticamente despreciable. Por lo tanto, cualquier región que nos quede, ya sea muy a la izquierda de -3 ó a la derecha de 3 va a ser una región que no va aportar área de forma significativa. Se puede apreciar en el gráfico N(0;1)



j) P(|Z| < 1,96) = P(-1,96 < Z < 1,96) = F(1,96) + F(1,96) - 1 = 2 × 0,9750 - 1 = 0,95

k) P(|Z| > 3,09) podemos resolverlo de las siguientes maneras:

Opción 1

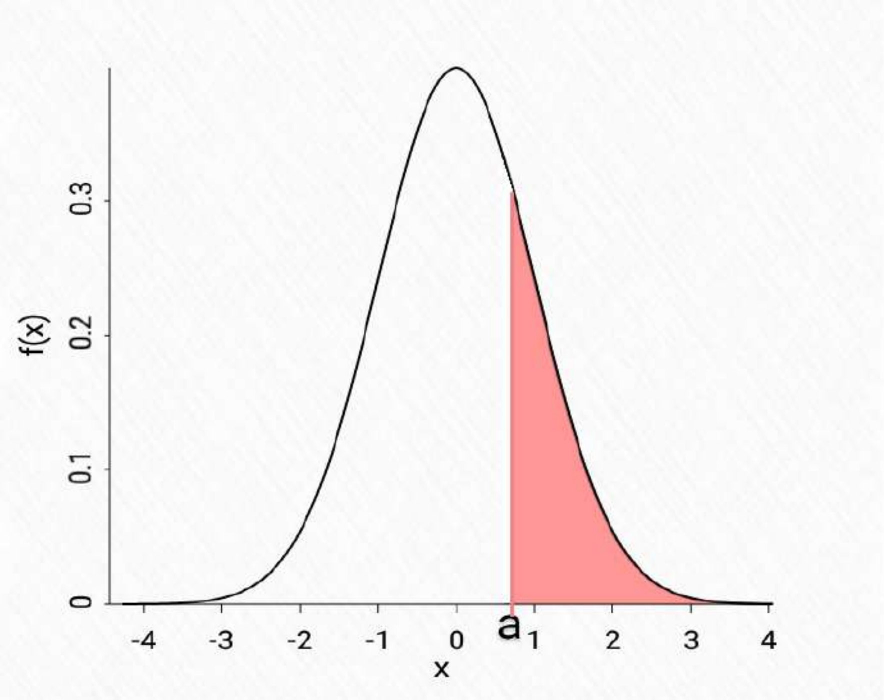
Planteando P[(Z < -3,09) U (Z > 3,09)] por ser sucesos mutuamente excluyentes
= P(Z < -3,09) + P(Z > 3,09) como son simétricas, tiene el mismo área
= 2 × P(Z > 3,09) = 2 × [1 - F(3,09)] = 2 × (1 - 0,9990) = 0,002

Opción 2

Utilizando la siguiente propiedad de área de colas P(|Z| ≥ x) = 2×(1 - F(x))
P(|Z| > 3,09) = 2 × (1 - F(3,09)) = 2 × (1 - 0,9990) = 0,002

l) Hallar a para que P(Z > a) = 0,2514

P(Z > a) = 0,2514 la probabilidad acumulada hasta ***a*** es el área de la región que se encuentra a la izquierda



Sabiendo que el área total es 1, le restamos el área de la región a la derecha. Entonces:
1 - P(Z > a) = 1 - 0,2514
Nos da que la probabilidad de que Z sea menor o igual (el área de la izquierda)
P(Z ≤ a) = 0,7486
Esto es igual a la función de distribución evaluada en ***a***.
Sabiendo su valor, podemos buscar ***a*** en la tabla:
F(***a***) = 0,7486 → ***a*** = 0,67

m) Hallar b para que P(Z > b) = 0,9382

Si el área a la derecha de un Z negativo (tiene probabilidad mayor que 0,5)

P(Z > ***b***) = F(***b***) = 0,9382 → ***b*** = -1,54

n) Hallar c para que P(Z > c) = 0,10

P(|Z| ≥ ***c***) = 2 × (1 - F(***c***)) = 0,10
Despejamos

2 × (1 - F(***c***)) = 0,10

$$1 - F(\boldsymbol{c}) = 0{,}10 \div 2$$

$$F(\boldsymbol{c}) = 0{,}95$$

$$\boldsymbol{c} = 1{,}645$$

Ejercicio 3.10:

Entre los diabéticos adultos, el nivel de glucosa en sangre en ayunas puede suponerse de distribución aproximadamente normal, con media 116 mg/dl y desviación estándar 15 mg/dl.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un diabético adulto tenga en ayunas un nivel de glucosa inferior a 120?

X = número de glucosa en sangre (mg/dl) de un diabético adulto en ayunas

X~N(116; 15)

$P(X < 120) = P(\frac{X-116}{15} < \frac{120-116}{15}) = P(Z < 4/15) = F_Z(4/15) = 0{,}6064$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un diabético adulto tenga en ayunas un nivel de glucosa inferior a 100?

$P(X < 100) = P(\frac{X-116}{15} < \frac{100-116}{15}) = P(Z < -16/15) = 1 - P(Z < 16/15) = 1 - F_Z(16/15) = 1 - 0{,}8577 = 0{,}1423$

c) ¿Y de que tenga un nivel comprendido entre 100 y 132?

$P(100 < X < 132) \Rightarrow P(\frac{100-116}{15} < \frac{X-116}{15} < \frac{132-116}{15}) = P(-16/15 < Z < 16/15)$

$P(-16/15 < Z < 16/15) = 2 \times F_Z(16/15) - 1 = 2 \times 0{,}8577 - 1 = 0{,}7154$

d) ¿Cuál será el nivel de glucosa que será superado por el 90% de los diabéticos adultos de la población?

$$0{,}90 = P(X > a) = P(Z > \frac{a-116}{15}) =$$

$$= P(Z < \frac{-a-116}{15})$$

$$= F_Z(\frac{116-a}{15})$$

$$\Rightarrow \frac{116-a}{15} = 1{,}282$$

Despejamos:

$$116 - a = 1{,}282 \times 15$$

$$-a = 19{,}23 - 116$$

$$a = 96{,}77$$

El nivel de glucosa será de 96,77 mg/dl

e) ¿Cuál será el nivel de glucosa tal que el 95% de la población tiene valores menores que él? Este valor, en cualquier variable continua, es llamado el percentil 95.

P(X < b) = 0,95

$$P(Z < \frac{b-116}{15}) = F_Z(\frac{b-.116}{15})$$

Despejamos:

$$\frac{b-116}{15} = 1{,}645$$

$$b - 116 = 1{,}645 \times 15$$

$$b = 24{,}675 + 116$$

$$b = 140{,}675$$

El nivel de glucosa tal que el 95% de la población tiene valores menores que él, es 140,675 mg/dl

Ejercicio 3.11:

En una población de niños la tensión arterial sistólica (TAS) se distribuye normalmente con media 92 mmHg y desvío de 10 mmHg.
a) ¿Qué probabilidad hay de que un niño de esta población supere un valor de TAS de 120mmHg?

X = tensión arterial sistólica (mmHg) en una población de niños
$X \sim N(92; 10)$

$P(X > 120) = P(\frac{X-92}{10} > \frac{120-92}{10}) = P(Z > 2{,}8) = 1 - F_Z(2{,}8) = 1 - 0{,}9974 = 0{,}0026$

b) ¿Qué porcentaje de esta población tendrá valores de TAS inferiores a 104mmHg?

$P(X < 104) = P(\frac{X-92}{10} < \frac{104-92}{10}) = P(Z < 1{,}2) = F_Z(1{,}2) = 0{,}8849$

c) ¿Qué valor de TAS máximo presenta el 5% de la población que tiene presión arterial más baja?

$P(X > C) = 0{,}05 \Rightarrow P(Z > \frac{C-92}{10}) = F_Z(\frac{92-C}{10})$

Despejamos:

$$\frac{92-C}{10} = 1{,}645$$

$$92 - C = 1{,}645 \times 10$$

$$C = 75{,}55$$

El valor máximo será 75,55 mmHg

Ejercicio 3.12:

Los valores de colesterol total para cierta población están distribuidos en forma normal con media 200 mg/dl y desvío estándar 10 mg/dl. Hallar la probabilidad de que un individuo de esa población tenga valor de colesterol menor que 196 mg/dl y mayor que 175 mg/dl.

X = valores de colesterol (mg/dl) total para cierta población
$X \sim N(200; 10)$

$P(175 < X < 196)$ *ESTANDARIZAMOS* $P(\frac{175-200}{10} < Z < \frac{196-200}{10})$

$P(-2{,}5 < Z < -0{,}4) = F_Z(2{,}5) - F_Z(0{,}4) = 0{,}9938 - 0{,}6554 =$ 0,3384

Ejercicio 3.13:

En cierta población el índice cefálico (cociente entre el diámetro transversal y el longitudinal del cráneo) se distribuye en forma normal con media 74 y desvío estándar 3,2. Se consideran dolicocéfalos (cráneo tipo alargado) a aquellos individuos cuyo índice es inferior a 75 y braquicéfalos (cráneo tipo corto o redondeado) a los individuos que presentan un índice superior a 80. Calcular qué porcentaje de la población queda incluido en cada segmento.

X = ÍNDICE CÉFALALICO DE LA POBLACIÓN

$X \sim N(74; 3{,}2)$

DOLICOCÉFALOS

$P(X < 75) = P(\frac{X-74}{3{,}2} < \frac{75-74}{3{,}2}) = P(Z < 5/16) = F_Z(5/16) = 0{,}6217$ (con tabla)

BRAQUICÉFALOS

$P(X > 80) = P(\frac{X-74}{3{,}2} > \frac{80-74}{3{,}2}) = P(Z > 1{,}87) = 1 - F_Z(1{,}87) = 0{,}0301$ (con tabla)

Con la app nos da Dolicocéfalos 62,27% y Braquicéfalos 3,04%