Trabajo Práctico Nº5:

Estimación por intervalos de confianza

Ejercicio 5.1

Retomemos el Ejercicio 3.10:
Entre los diabéticos adultos, el nivel de glucosa en sangre en ayunas puede suponerse de distribución aproximadamente normal, con media 116 mg/dl y desviación estándar 15 mg/dl.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un diabético adulto tenga en ayunas un nivel de glucosa inferior a 100? (Esta probabilidad estaba calculada en 3.10 b))

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, si se toma una muestra de 9 individuos y se les mide la glucemia en ayunas, la media de la muestra sea inferior a 100 mg/dl?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un adulto diabético en ayunas tenga un nivel comprendido entre 100 y 132 mg/dl? (Esta probabilidad estaba calculada en el punto c del problema 3.10)

d) ¿Cuál es la probabilidad de que, si se toma una muestra de 9 individuos y se les mide la glucemia en ayunas, la media de la muestra esté comprendida entre 100 y 132 mg/dl?

e) Compare b y d con los valores de probabilidad obtenidos en los ítems a) y c).Intérprete.

a) **Esta probabilidad estaba calculada en 3.10 b) = 0,1423 ⇒ 14,23%**

b)

$$\overline{\chi}_9 \sim N(116; \frac{15}{\sqrt{9}})$$

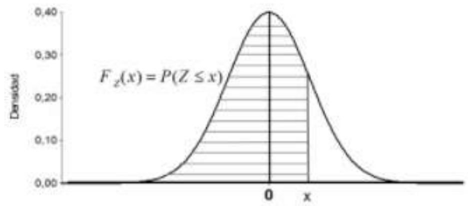
Se pide $P(\overline{\chi}_9 < 100)$, entonces:

$$P(\overline{\chi}_9 < 100) = P(\underbrace{\frac{\overline{\chi}_9 - 116}{\frac{15}{\sqrt{9}}}}_{Z \sim N(0;\ 1)} < \frac{100 - 116}{\frac{15}{\sqrt{9}}})$$

Estandarizamos:

$P(Z < -3,2) = 1 - F_Z(3,2) = 1 - 0,9993 =$ **0,0007**

Tabla 5: Función de Distribución Normal Estándar



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997

c) **Esta probabilidad estaba calculada en 3.10 c) = 0,7154 ⇒ 71,54%**

d) En este caso planteamos:

$$P(100 < \bar{\chi}_9 < 132) = P\left(\frac{100 - 116}{\frac{15}{\sqrt{9}}} < \underbrace{\frac{\bar{\chi}_9 - 116}{\frac{15}{\sqrt{9}}}}_{Z \sim N(0;\ 1)} < \frac{132 - 116}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right)$$

Estandarizamos:

P(-3,2 < Z < 3,2) = 2·FZ(3,2) - 1 = 2·0,9993 - 1 = **0,9986**

e) Podemos observar que al tener medias de tamaño *n*, $\bar{X}$ tendrá una distribución $\bar{\chi}_n \sim N(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, teniendo una desviación estándar más pequeña haciendo que la probabilidad sea menor, achicando el área de las colas (acumulandosé aún más, área en el centro de la distribución).

Ejercicio 5.2

En un criadero de pollos se sabe que el peso de la cresta es una variable aleatoria normalmente distribuida con media = 101,8 mg y Varianza = 784 mg^2.

a) Calcular la probabilidad de que el peso de la cresta de un pollo tomado al azar de esa población supere los 95 mg.

b) Si se extrae una muestra aleatoria de 16 pollos y se calcula el peso medio $\bar{X}$, calcular: P($\bar{X}$ > 95).

X = peso (mg) de las crestas de pollos

$$X \sim N(\mu;\ \sigma) \ \Rightarrow \ \bar{X} \sim N(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Datos:

$\bar{X}$ = 101,8

σ^2 = 784 → *aplicamos raíz cuadrada para obtener el desvío estándar (σ) =* $\sqrt{\sigma^2}$ *= 28*

a) Calcular la probabilidad de que el peso de la cresta de un pollo tomado al azar de esa población supere los 95 mg

$$\bar{\chi}_1 \sim N(101,8;\ \frac{28}{\sqrt{n}})$$

Nos pide calcular P($\bar{X}_1$ > 95)

Cuando tenemos una variable normal con varianza conocida, el intervalos de confianza:

$$P(\bar{X} - Z\frac{\alpha}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z\frac{\alpha}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$$P(\underbrace{\frac{\bar{X}_1 - 101,8}{\frac{28}{\sqrt{1}}}}_{Z \sim N(0;\ 1)} > \frac{95 - 101,8}{\frac{28}{\sqrt{1}}}) = P(Z > -0,24) = F_Z(0,24) = \mathbf{0,5948}$$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141

b) Si se extrae una muestra aleatoria de 16 pollos y se calcula el peso medio $\overline{X}$, calcular: $P(\overline{X} > 95)$

$$P(\overline{X}_{16} > 95) = P(\underbrace{\frac{\overline{X}_{16} - 101{,}8}{\frac{28}{\sqrt{16}}}}_{Z \sim N(0;\ 1)} > \frac{95 - 101{,}8}{\frac{28}{\sqrt{16}}}) = P(Z > -0{,}97) = F_Z(0{,}97) = \mathbf{0{,}8340}$$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389

Ejercicio 5.3

Se sabe que la nota del examen de Bioestadística de los estudiantes de una carrera universitaria es una variable aleatoria normalmente distribuida con media 5,8 y desviación estándar 2,4. Hallar la probabilidad de que la media de una muestra tomada al azar de 16 estudiantes esté comprendida entre 5 y 7.

Tenemos n = 16 y una distribución $X \sim N(\mu;\ \sigma)$

$$\overline{X}_{16} \sim N(5{,}8; \frac{2{,}4}{\sqrt{16}})$$

Nos pide calcular $P(5 < \overline{X}_{16} < 7)$, estandarizamos:

$$P(\frac{5 - 5{,}8}{\frac{2{,}4}{\sqrt{16}}} < \underbrace{\frac{\overline{X}_{16} - 5{,}8}{\frac{2{,}4}{\sqrt{16}}}}_{Z \sim N(0;\ 1)} < \frac{7 - 5{,}8}{\frac{2{,}4}{\sqrt{16}}}) = P(-1{,}33 < Z < 2)$$

$P(-1{,}33 < Z < 2) = F_Z(2) - P(Z < -1{,}33) = F_Z(2) + F_Z(1{,}33) - 1 = 0{,}9772 + 0{,}9082 - 1 =$ **0,8854**

Ejercicio 5.4

La concentración de hierro en el suero de hombres normales sigue una distribución normal con media 120 g /100ml y desviación estándar 15 g /100ml.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de nueve hombres normales proporcione una media entre 115 y 125 g/100ml?

b) Idem tomando una muestra de 16 hombres.

c) ¿Cuál es el tamaño mínimo de muestra a tomar, si se quiere que la probabilidad de que la media esté entre esos valores sea mayor que 0,90?

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de nueve hombres normales proporcione una media entre 115 y 125 g/100ml?

X = CC ($\mu g/100ml$) de hierro en el suero

X~N(μ; σ)

En este caso tenemos n = 9 y la media muestral = $\bar{\chi}_9 \sim N(120; \frac{15}{\sqrt{9}})$

Se nos pide calcular P(115 < $\overline{X}$ < 125)

$$P(\frac{115-120}{\frac{15}{\sqrt{9}}} < \underbrace{\frac{\overline{X}_9 - 120}{\frac{15}{\sqrt{9}}}}_{Z \sim N(0;\ 1)} < \frac{125-120}{\frac{15}{\sqrt{9}}}) = P(-1 < Z < 1)$$

P(-1 < Z < 1) = 2· $F_Z(1)$ - 1 = 2· 0,8413 - 1 = **0,6826**

Tabla 5: Función de Distribución Normal Estándar

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	$\boxed{0,8413}$	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830

b) Idem tomando una muestra de 16 hombres

$$P(\frac{115-120}{\frac{15}{\sqrt{16}}} < \underbrace{\frac{\overline{X}_{16} - 120}{\frac{15}{\sqrt{16}}}}_{Z \sim N(0;\ 1)} < \frac{125-120}{\frac{15}{\sqrt{16}}}) = P(-1,3\widehat{3} < Z < 1,3\widehat{3})$$

P($-1,3\widehat{3}$ < Z < $1,3\widehat{3}$) = 2· F_Z(1,33) - 1 = 2·0,9082 - 1 = **0,8164**

Tabla 5: Función de Distribución Normal Estándar

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	$\boxed{0,9082}$	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177

La probabilidad en mayor que el el item b) porque el área alrededor de la esperanza es mayor cuando la función de densidad tiene menor varianza, ya que se hace más "empinada".

c) ¿Cuál es el tamaño mínimo de muestra a tomar, si se quiere que la probabilidad de que la media esté entre esos valores sea mayor que 0,90?

Queremos saber cuán pequeño debe ser nuestra muestra para qe P(115 < $\bar{\chi}_n$ < 125) = 0,90

$$P(\frac{115-120}{\frac{15}{\sqrt{n}}} < \underbrace{\frac{\overline{X}_n - 120}{\frac{15}{\sqrt{n}}}}_{Z} < \frac{125-120}{\frac{15}{\sqrt{n}}}) = 0,90$$

$$P(\frac{-5\sqrt{n}}{15} < Z < \frac{5\sqrt{n}}{15}) = 0,90$$

$$P(\frac{-\sqrt{n}}{3} < Z < \frac{\sqrt{n}}{3}) = 0,90$$

Despejamos:

$$2 \cdot F_z(\frac{\sqrt{n}}{3}) - 1 = 0,90$$

$$F_z(\frac{\sqrt{n}}{3}) = \frac{0,90 + 1}{2}$$

$$F_z(\frac{\sqrt{n}}{3}) = 0,95$$

Tabla 5: Función de Distribución Normal Estándar

x	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291	3,891
F(x)	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995	0,99995
1-F(x)	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005	0,00005
2(1-F(x))	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001	0,0001

$$\frac{\sqrt{n}}{3} = 1,645$$

$$\sqrt{n} = 1,645 \cdot 3$$

$$n = 4,935^2$$

El tamaño mínimo que debe tomar en $n_{min} = 24$

Ejercicio 5.5:

La altura de las plantas de un invernadero tiene una varianza de 2,56 cm2. Se extrae una muestra al azar de 20 plantas y se obtiene una altura promedio de 10,6 cm.

a) Estimar, con un coeficiente de confianza de 95%, la altura media de las plantas del invernadero. Indicar las suposiciones necesarias para que la estimación sea válida.

b) Efectuar la misma estimación que en a) pero con una confianza del 90%.

c) Comparar ambos intervalos y extraer conclusiones.

d) Si se selecciona una muestra de 40 plantas y se obtiene la misma media muestral, hallar un intervalo de confianza del 95% para la altura media de las plantas del invernadero. Comparar con el resultado obtenido en a).

X = altura (cm) de las plantas
$X \sim N(\mu; \ \sigma)$

Datos:
n = 20
$\overline{X} = 10,6$
$\sigma^2 = 2,56 \rightarrow \sigma = 1,6$

a) Estimar, con un coeficiente de confianza de 95%, la altura media de las plantas del invernadero. Indicar las suposiciones necesarias para que la estimación sea válida.

$1 - \alpha = 0,95$ →*porque el intervalo de confianza es del 95%, por lo tanto, hay un 5% distribuido en las colas.*

$Z_{\frac{0,05}{2}}$= 1,960

$$\overline{X}_{20} \sim N(10{,}6;\ \frac{1{,}6}{\sqrt{20}})$$

Cuando tenemos una variable normal con varianza conocida, el intervalos de confianza:

$$C(\overline{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$$C(10,6 - Z_{\frac{0,05}{2}} \frac{1,6}{\sqrt{20}} < \mu < 10,6 + Z_{\frac{0,05}{2}} \frac{1,6}{\sqrt{20}}) = 0{,}95$$

C(10,6 - 1,960·0,357 < μ < 10,6 + 1,960·0,357) = 0,95

C(9,90 < μ < 11,30) = 0,95

b) Efectuar la misma estimación que en a) pero con una confianza del 90%

1 - α = 0,90 →*porque el intervalo de confianza es del 90%, por lo tanto, hay un 10% distribuido en las colas.*

$Z_{\frac{0,10}{2}}$= 1,725

$$C(10,6 - Z_{\frac{0,10}{2}} \frac{1,6}{\sqrt{20}} < \mu < 10,6 + Z_{\frac{0,10}{2}} \frac{1,6}{\sqrt{20}}) = 0{,}90$$

C(10,6 - 1,645·0,357 < μ < 10,6 + 1,645·0,357) = 0,90

C(10,01 < μ < 11,19) = 0,90

El intervalo de confianza del ítem b) es mayor, por lo tanto el nivel de confianza en esa muestra es mayor !?

d) Si se selecciona una muestra de 40 plantas y se obtiene la misma media muestral, hallar un intervalo de confianza del 95% para la altura media de las plantas del invernadero. Comparar con el resultado obtenido en a)

$$C(10,6 - Z_{\frac{0,05}{2}} \frac{1,6}{\sqrt{40}} < \mu < 10,6 + Z_{\frac{0,05}{2}} \frac{1,6}{\sqrt{40}}) = 0{,}95$$

C(10,6 - 1,960·0,253 < μ < 10,6 + 1,960·0,253) = 0,95

C(10,10 < μ < 11,09) = 0,95

El intervalo de confianza del ítem c) es menor en comparación al del ítem a) ya que hubo un aumento en el tamaño de la muestra, disminuyendo la longitud del intervalo. Por lo tanto, al ser el intervalo más corto, hace que sea más preciso.

Ejercicio 5.6

El número de latidos por minuto en individuos de cierta población se considera una variable aleatoria distribuida normalmente con desviación estándar 5 latidos por minuto. Se selecciona al azar una muestra de 49 individuos de esa población y se obtiene una media de 80 latidos por minuto. Hallar:

a) Un intervalo de confianza del 90% para el número medio de latidos por minuto en individuos de esa población.

b) Un intervalo de confianza del 95% para el número medio de latidos por minuto en individuos de esa población.

X = latidos por minuto en individuos

$$X \sim N(\mu; \sigma) \Rightarrow \overline{X} \sim N(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Datos:
n = 49
$\overline{X}$ = 80
σ = 5

$$C(\overline{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

a) Un intervalo de confianza del 90% para el número medio de latidos por minuto en individuos de esa población

1 - α = 0,90 →*porque el intervalo de confianza es del 90%, por lo tanto, hay un 10% distribuido en las colas.*

$$C(80 - Z_{\frac{0,10}{2}} \frac{5}{\sqrt{49}} < \mu < 80 + Z_{\frac{0,10}{2}} \frac{5}{\sqrt{49}}) = 0,90$$

$$C(80 - 1,645 \cdot 0,714 < \mu < 80 + 1,645 \cdot 0,714) = 0,90$$

$$\mathbf{C(78,82 < \mu < 81,17) = 0,90}$$

b) Un intervalo de confianza del 95% para el número medio de latidos por minuto en individuos de esa población

1 - α = 0,95 →*porque el intervalo de confianza es del 95%, por lo tanto, hay un 5% distribuido en las colas.*

$$C(80 - Z_{\frac{0,05}{2}} \frac{5}{\sqrt{49}} < \mu < 80 + Z_{\frac{0,05}{2}} \frac{5}{\sqrt{49}}) = 0,95$$

$$C(80 - 1,960 \cdot 0,714 < \mu < 80 + 1,960 \cdot 0,714) = 0,95$$

$$\mathbf{C(78,60 < \mu < 81,39) = 0,95}$$

Ejercicio 5.7

El peso uterino de ratas para experimentación es una variable aleatoria normal con σ = 35 mg. Hallar qué tamaño mínimo de muestra se necesita para estimar la media poblacional con una aproximación de 10 mg y una confianza del 95%.

Longitud = 2·Aproximación

$$P(\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \underbrace{Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{Aproximación}) = 1 - \alpha$$

Datos:

$\sigma = 35$

$1 - \alpha = 0{,}95$ →*porque el intervalo de confianza es del 95%, por lo tanto, hay un 5% distribuido en las colas.*

$Z_{\frac{0,05}{2}} = 1{,}960$

	α (dos colas)												
n	0,2	0,1	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005	0,00025	0,0001	n
∞	1,282	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807	3,023	3,291	3,481	3,662	3,891	∞

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1{,}960 \cdot \frac{35}{\sqrt{n}} \leq 10$$

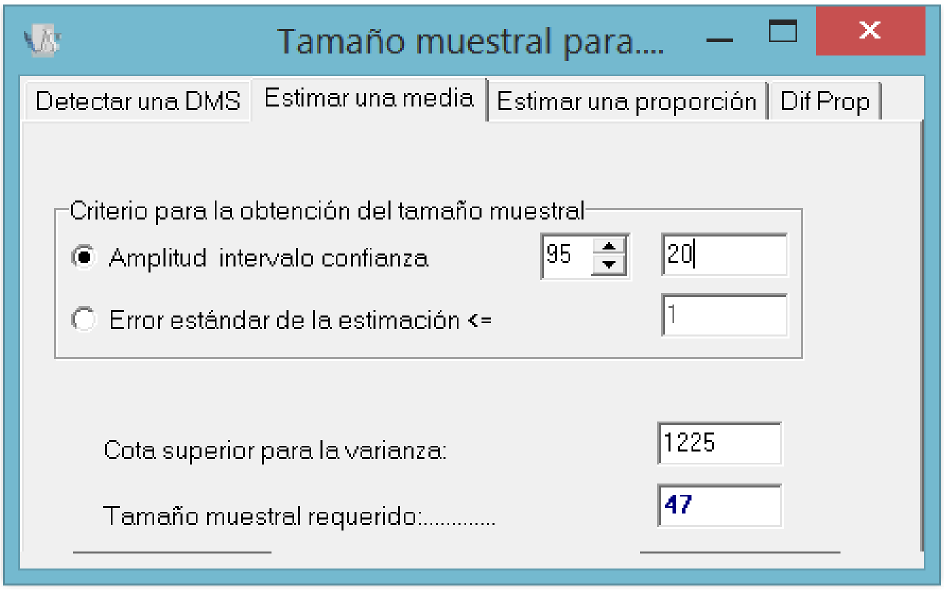
Despejamos:

$$\sqrt{n} \geq \frac{1{,}960 \cdot 35}{10}$$

$$n \geq 6{,}86^2$$

$$n_{mínimo} = 47$$

InfoStat:



Ejercicio 5.8

Se supone que el nivel de hemoglobina en varones mayores de 11 años está distribuido normalmente con = 1,209 g/100 ml. ¿Qué tamaño mínimo de muestra se debería tomar para estimar la media de la población con un intervalo de confianza del 99% y una longitud de 1 g/100 ml?

Datos:

$\sigma = 1{,}209$

$1 - \alpha = 0{,}99$ →*porque el intervalo de confianza es del 99%, por lo tanto, hay un 1% distribuido en las colas.*

$Z_{\frac{0,01}{2}} = 2{,}576$

En este caso nos pide calcular la longitud del intervalo Longitud = 2·Aproximación

$$2 \cdot Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 \cdot 2{,}576 \cdot \frac{1{,}209}{\sqrt{n}} \leq 1$$

Despejamos:

$$\sqrt{n} \geq \frac{2 \cdot 2{,}576 \cdot 1{,}209}{1}$$

$$n \geq 6{,}228768^2$$

$n_{mínimo}$ = 39

Ejercicio 5.10

Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución χ^2 con 36 grados de libertad.

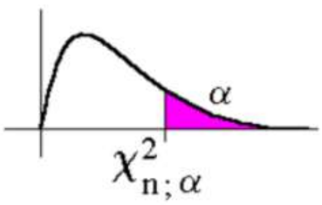
Mediante el uso de tablas hallar:
a) P(X > 35,336).
b) P(X < 61,582).
c) *a* para que P(X > a) = 0,05.
d) *b* para que P(X < b) = 0,1.

Como la variable aleatoria sigue una distribución χ^2_n

a) P(X > 35,336) = **0,5**

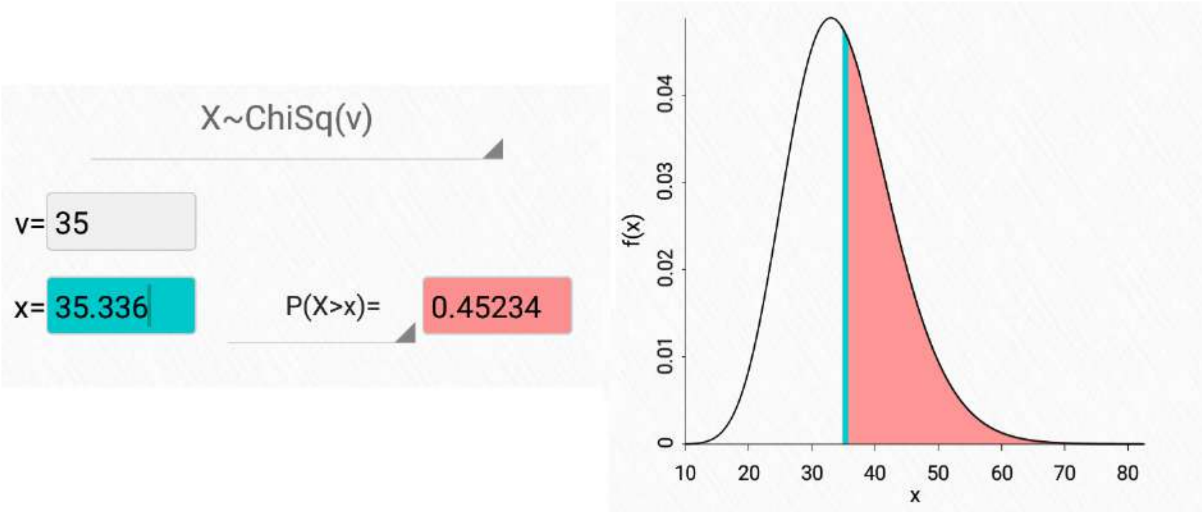
Con tabla:

Tabla 6: Puntos críticos $\chi^2_{\alpha;n}$ de la distribución ji-cuadrado con n grados de libertad (Continuación)



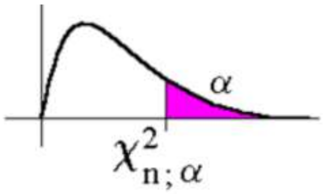
n\α	0,995	0,975	0,95	0,9	0,5	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	
31	14.458	17.539	19.281	21.434	30.336	41.422	44.985	48.232	52.191	55.002	31
32	15.134	18.291	20.072	22.271	31.336	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328	32
33	15.815	19.047	20.867	23.110	32.336	43.745	47.400	50.725	54.775	57.648	33
34	16.501	19.806	21.664	23.952	33.336	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964	34
35	17.192	20.569	22.465	24.797	34.336	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275	35
36	17.887	21.336	23.269	25.643	$\boxed{35.336}$	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581	36
37	18.586	22.106	24.075	26.492	36.336	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883	37
38	19.289	22.878	24.884	27.343	37.335	49.513	53.384	56.895	61.162	64.181	38
39	19.996	23.654	25.695	28.196	38.335	50.660	54.572	58.120	62.428	65.475	39
40	20.707	24.433	26.509	29.051	39.335	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	40

Con aplicación:



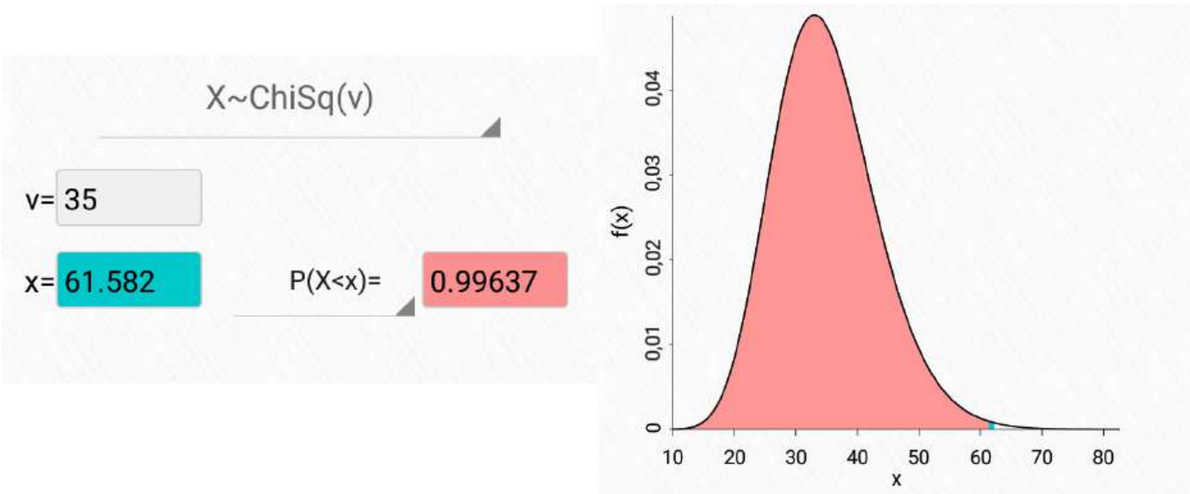
b) P(X < 61,582) = 1 - P(X > 61,582) = 1 - 0,005 = **0,995**
Con tabla:

Tabla 6: Puntos críticos $\chi^2_{\alpha;n}$ de la distribución ji-cuadrado con n grados de libertad (Continuación)



n\α	0,995	0,975	0,95	0,9	0,5	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	
31	14.458	17.539	19.281	21.434	30.336	41.422	44.985	48.232	52.191	55.002	31
32	15.134	18.291	20.072	22.271	31.336	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328	32
33	15.815	19.047	20.867	23.110	32.336	43.745	47.400	50.725	54.775	57.648	33
34	16.501	19.806	21.664	23.952	33.336	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964	34
35	17.192	20.569	22.465	24.797	34.336	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275	35
36	17.887	21.336	23.269	25.643	35.336	47.212	50.998	54.437	58.619	$\boxed{61.581}$	36
37	18.586	22.106	24.075	26.492	36.336	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883	37
38	19.289	22.878	24.884	27.343	37.335	49.513	53.384	56.895	61.162	64.181	38
39	19.996	23.654	25.695	28.196	38.335	50.660	54.572	58.120	62.428	65.475	39
40	20.707	24.433	26.509	29.051	39.335	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	40

Con aplicación:



c) *a* para que P(X > a) = 0,05

α= 0,05 n= 36

P(X > a) = 0,05

F(a) = 0,05

a = 50,998

n\α	0,995	0,975	0,95	0,9	0,5	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	
31	14.458	17.539	19.281	21.434	30.336	41.422	44.985	48.232	52.191	55.002	31
32	15.134	18.291	20.072	22.271	31.336	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328	32
33	15.815	19.047	20.867	23.110	32.336	43.745	47.400	50.725	54.775	57.648	33
34	16.501	19.806	21.664	23.952	33.336	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964	34
35	17.192	20.569	22.465	24.797	34.336	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275	35
36	17.887	21.336	23.269	25.643	35.336	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581	36
37	18.586	22.106	24.075	26.492	36.336	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883	37
38	19.289	22.878	24.884	27.343	37.335	49.513	53.384	56.895	61.162	64.181	38

d) *b* para que P(X < b) = 0,1

1 - P(X > b) = 0,1

α= 0,1 n= 36

1 - P(X < b) = 0,1

1 - F(b) = 0,1

F(b) = 0,9

b = 25,643

n\α	0,995	0,975	0,95	0,9	0,5	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	
31	14.458	17.539	19.281	21.434	30.336	41.422	44.985	48.232	52.191	55.002	31
32	15.134	18.291	20.072	22.271	31.336	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328	32
33	15.815	19.047	20.867	23.110	32.336	43.745	47.400	50.725	54.775	57.648	33
34	16.501	19.806	21.664	23.952	33.336	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964	34
35	17.192	20.569	22.465	24.797	34.336	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275	35
36	17.887	21.336	23.269	25.643	35.336	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581	36
37	18.586	22.106	24.075	26.492	36.336	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883	37
38	19.289	22.878	24.884	27.343	37.335	49.513	53.384	56.895	61.162	64.181	38
39	19.996	23.654	25.695	28.196	38.335	50.660	54.572	58.120	62.428	65.475	39
40	20.707	24.433	26.509	29.051	39.335	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	40

Ejercicio 5.11

Suponga que el tiempo del recorrido de una línea de subte entre sus terminales sigue una distribución normal con una desviación estándar σ =1 minuto. Si se elige al azar una muestra de 17 tiempos de recorridos de subtes, encuentre la probabilidad de que la varianza muestral sea mayor que 2.

Para el cálculo de la varianza muestral

$$Y_n = \frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$s = 1 \quad n = 17 \quad s^2 = 1$$

$$P(S^2 > 2) = P\left(\frac{(17-1)\cdot S^2}{1^2} > \frac{(17-1)\cdot 2}{1^2}\right)$$

$$= P(Y_{17} > 32)$$

Tenemos que $Y_{17} \sim \chi^2_{16}$ entonces:

$P(Y_{17} > 32) =$ **0,01**

n\α	0,995	0,975	0,95	0,9	0,5	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	
16	5.142	6.908	7.962	9.312	15.338	23.542	26.296	28.845	$\boxed{32.000}$	34.267	16
17	5.697	7.564	8.672	10.085	16.338	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	17
18	6.265	8.231	9.390	10.865	17.338	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	18
19	6.844	8.907	10.117	11.651	18.338	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	19
20	7.434	9.591	10.851	12.443	19.337	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	20

Ejercicio 5.12

Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución t de Student con 25 grados de libertad. Mediante el uso de tablas hallar:

a) a para que P(|X| > a) = 0,05.
b) b para que P(|X| < b) = 0,995
c) P(|X| > 3,45)
d) P(|X| < 3,078)
e) P(X > 2,787)
f) P(X < -1,316)
g) c para que P(X > c) = 0,001
h) d para que P(X < d) = 0,05

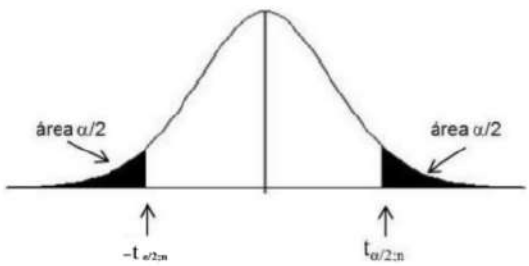
$$P(|T| > t_{\frac{\alpha}{2}};\ n) = \alpha$$

a) P(|X| > a) = 0,05

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2}};\ n < T < t_{\frac{\alpha}{2}};\ n) = 1 - \alpha$$

$$a \Rightarrow t_{\frac{0,05}{2}};\ 25 \Rightarrow \mathbf{2,060}$$

Tabla 7b: Puntos críticos $t_{\alpha/2;n}$ de la distribución t de Student de dos colas con n grados de libertad



	α (dos colas)												
n	0,2	0,1	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005	0,00025	0,0001	n
21	1,323	1,721	2,080	2,414	2,518	2,831	3,135	3,432	3,819	4,110	4,399	4,784	21
22	1,321	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,412	3,792	4,077	4,361	4,736	22
23	1,319	1,714	2,069	2,398	2,500	2,807	3,104	3,393	3,768	4,047	4,326	4,693	23
24	1,318	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,091	3,376	3,745	4,021	4,294	4,654	24
25	1,316	1,708	$\boxed{2,060}$	2,385	2,485	2,787	3,078	3,361	3,725	3,996	4,265	4,619	25

b) b para que P(|X| < b) = 0,995

P(|X| < b) = 1 - P(|X| > b)

P(|X| > b) = -1·(0,995 + 1)

P(|X| > b) = 0,005

$$b \Rightarrow t_{\frac{0,005}{2}};\ 25 \Rightarrow \mathbf{3,078}$$

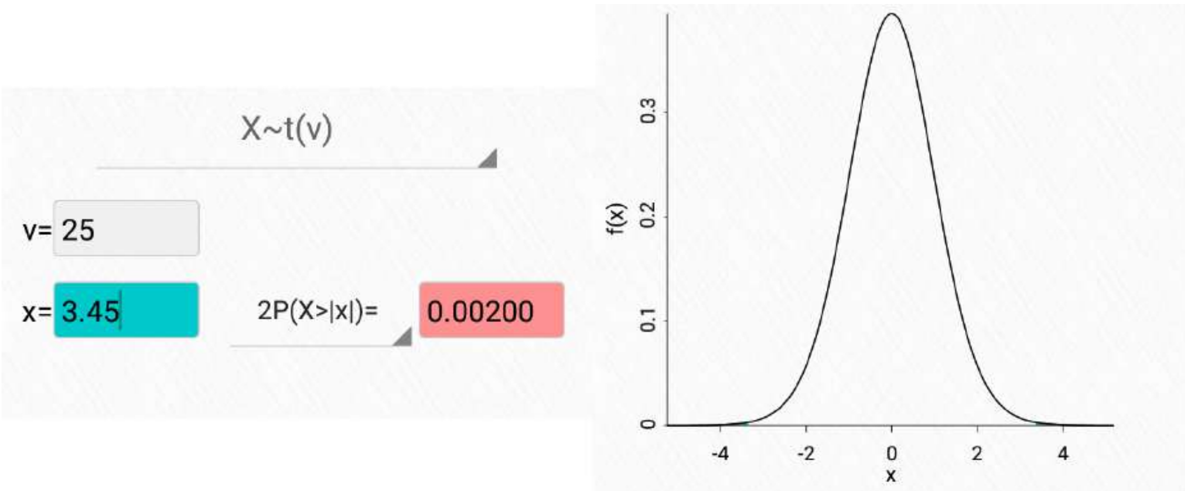
n	α (dos colas)												n
	0,2	0,1	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005	0,00025	0,0001	
21	1,323	1,721	2,080	2,414	2,518	2,831	3,135	3,432	3,819	4,110	4,399	4,784	21
22	1,321	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,412	3,792	4,077	4,361	4,736	22
23	1,319	1,714	2,069	2,398	2,500	2,807	3,104	3,393	3,768	4,047	4,326	4,693	23
24	1,318	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,091	3,376	3,745	4,021	4,294	4,654	24
25	1,316	1,708	2,060	2,385	2,485	2,787	$\boxed{3{,}078}$	3,361	3,725	3,996	4,265	4,619	25

c) P(|X| > 3,45)

Propiedad:

$|X| \geq a \quad \Rightarrow \quad X \leq a \quad ó \quad X \geq a$
$|X| > a \quad \Rightarrow \quad X < -a \quad ó \quad X > a$

P(|X| > 3,45) = 2· P(X **>** 3,45)



d) P(|X| < 3,078)

Propiedad:

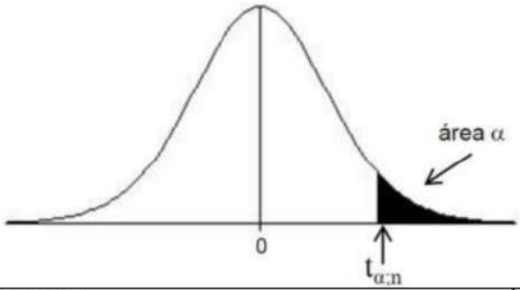
$|X| \leq a \Rightarrow -a \leq X \leq a$
$|X| < a \Rightarrow -a < X < a$

P(|X| < 3,078) = 2· **(**P(X **>** 3,078) - 1)

P(|X| < 3,078) = 2·(0,0025 - 1)

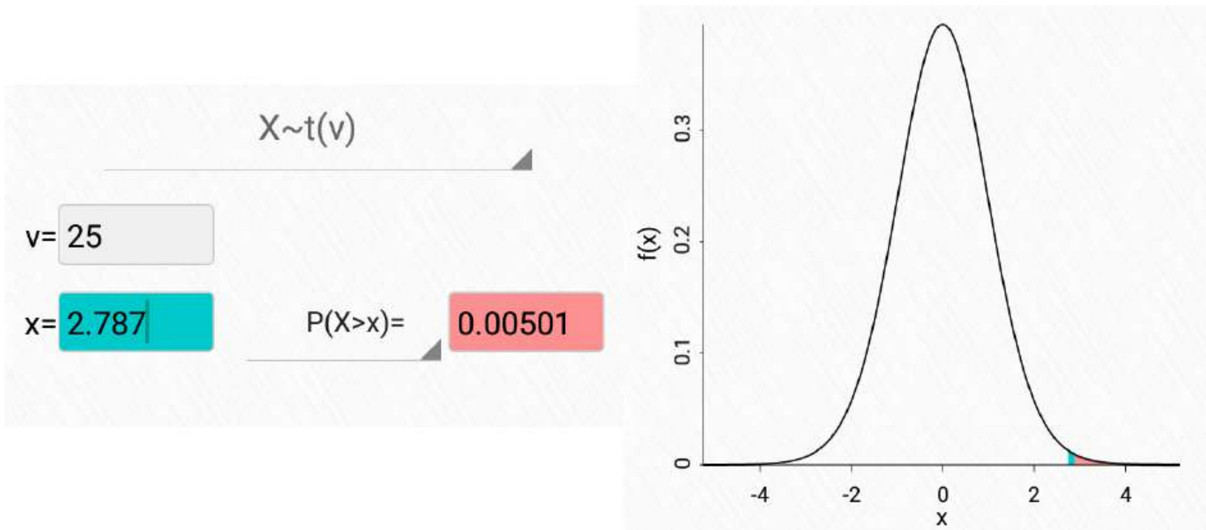
P(|X| < 3,078) = **0,995**

Tabla 7a: Puntos críticos $t_{\alpha;n}$ de la distribución t de Student de una cola con n grados de libertad



n	α(una cola) 0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005	0,00025	0,0001	n
21	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819	4,110	4,493	21
22	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792	4,077	4,452	22
23	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,768	4,047	4,415	23
24	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745	4,021	4,382	24
25	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725	3,996	4,352	25

e) P(X > 2,787)



f) P(X < -1,316)

P(X < -1,316) = P(X **>** 1,316)

P(X < -1,316) = **0,1**

n	α(una cola) 0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005	0,00025	0,0001	n
21	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819	4,110	4,493	21
22	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792	4,077	4,452	22
23	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,768	4,047	4,415	23
24	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745	4,021	4,382	24
25	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725	3,996	4,352	25

g) c para que P(X > c) = 0,001

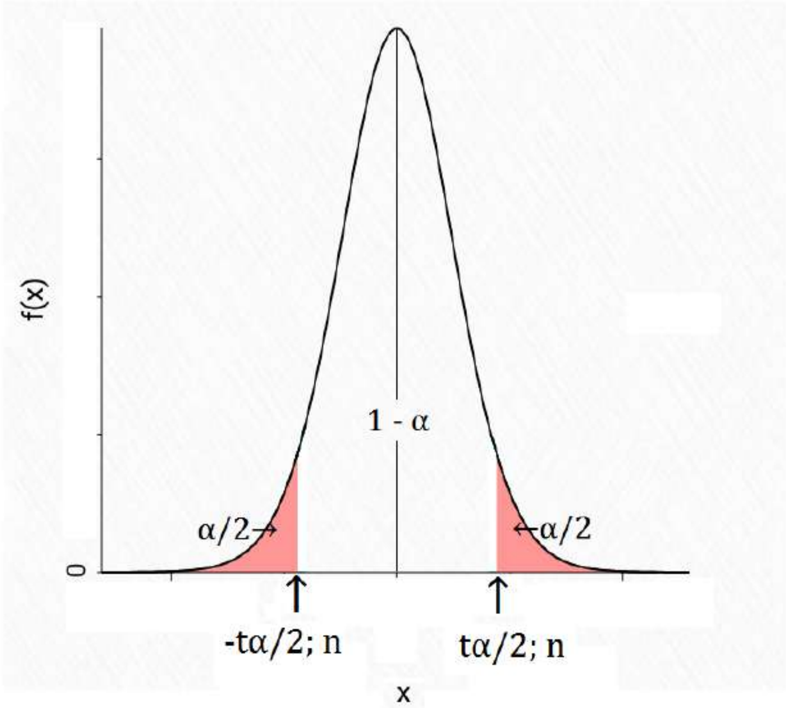
P(X **>** c) = 0,001

c = **3,450**

n	α(una cola) 0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005	0,00025	0,0001	n
21	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819	4,110	4,493	21
22	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792	4,077	4,452	22
23	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,768	4,047	4,415	23
24	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745	4,021	4,382	24
25	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725	3,996	4,352	25

pipiMorch

h) d para que P(X < d) = 0,05



P(X < d) = P(X **>** -d) = 0,05

P(X < d) = **- 1,708**

n	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005	0,00025	0,0001	n
	α(una cola)											
21	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819	4,110	4,493	21
22	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792	4,077	4,452	22
23	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,768	4,047	4,415	23
24	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745	4,021	4,382	24
25	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725	3,996	4,352	25

Ejercicio 5.13

El volumen de suero inyectado en ciertos pacientes es una variable aleatoria normal. De una muestra aleatoria de 15 pacientes se obtuvo una media $\overline{X}$ = 264 cm³ y una desviación estándar s = 28 cm³. Hallar un intervalo de confianza del 98% para el volumen medio de suero inyectado.

X = volumen de suero (cm³) inyectado en ciertos pacientes

X~N(μ ; σ)

Datos:

n = 15

$\overline{X}$= 264

s = 28

1 - α = 0,98 →*porque el intervalo de confianza es del 98%, por lo tanto, hay un 2% distribuido en las colas.*

$t\frac{0{,}02}{2}$; 14 ⇒ 2,624

Cuando no conocemos σ reemplazamos por S, quedando el intervalo de confianza de la siguiente manera:

$$C(\overline{x} - t\frac{\alpha}{2}; n - 1 \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t\frac{\alpha}{2}; n - 1 \frac{s}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$$C(264 - 2{,}624 \cdot \frac{28}{\sqrt{15}} < \mu < 264 + 2{,}624 \cdot \frac{28}{\sqrt{15}}) = 0{,}98$$

C(245,03 < μ < 282,97) = 0,98

Ejercicio 5.14

Hallar la probabilidad de que una muestra aleatoria de 25 observaciones de una población normal con varianza σ^2 = 6 tenga una varianza muestral:
a) Mayor que 9,1
b) Entre 3,462 y 10,745

$$X \sim N(\mu;\ \sigma)$$

Para el cálculo de la varianza muestral

$$Y_n = \frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Datos:
n = 25
σ^2 = 6

a) Mayor que 9,1

$$P(S^2 > 9,1) = P\left(\frac{(25-1)\cdot S^2}{6} > \frac{(25-1)\cdot 9,1}{6}\right)$$

$$P(S^2 > 9,1) = P(Y_{25} > 36,4)$$

Tenemos que $Y_{25} \sim \chi^2_{24}$ entonces:

$$P(Y_{25} > 36,4) = \mathbf{0,05}$$

n\α	0,995	0,975	0,95	0,9	0,5	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	
21	8.034	10.283	11.591	13.240	20.337	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	21
22	8.643	10.982	12.338	14.041	21.337	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	22
23	9.260	11.689	13.091	14.848	22.337	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	23
24	9.886	12.401	13.848	15.659	23.337	33.196	$\boxed{36.415}$	39.364	42.980	45.558	24
25	10.520	13.120	14.611	16.473	24.337	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928	25

b) Entre 3,462 y 10,745

$$P(3,462 < S^2 < 10,745) = P\left(\frac{(25-1)\cdot 3,462}{6} < \frac{(25-1)\cdot S^2}{6} < \frac{(25-1)\cdot 10,745}{6}\right)$$

$$P(3,462 < S^2 < 10,745) = P(13,848 < Y_{25} < 42,980)$$

$$P(13,848 < Y_{25} < 42,980) = 0,95 - 0,01$$

$$P(13,848 < Y_{25} < 42,980) = \mathbf{0,94}$$

Ejercicio 5.15

El rendimiento de una variedad de maíz es una variable aleatoria que se distribuye normalmente. De una muestra de 10 parcelas cultivadas se obtuvo un rendimiento medio de 71 Tm/Ha con una desviación estándar de 8,7 Tm/Ha. Hallar un intervalo de confianza del 95% para la varianza de esa variable aleatoria.

X = rendimiento de variedad de maíz

$$X \sim N(\mu;\ \sigma)$$

Queremos un intervalo de confianza para la varianza, por lo tanto, debemos estimar a σ^2 (intervalo depende del valor de S)

$$\widehat{\sigma^2} = S^2$$

Datos:
n = 10
$\overline{X}$ = 71
S = 8,7 ⇒ S^2 = 75,69
1 - α = 0,95 →*porque el intervalo de confianza es del 95%, por lo tanto, hay un 5% distribuido en las colas.*

$$C\left(\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}\right) = 1 - \alpha$$

Buscamos los valores en la tabla 6, para hallar el intervalo de confianza:

$\chi^2_{0,025;\,9}$ = 19,023 → *proviene del 5% de las colas = 2×0,025 = 0,05*

$\chi^2_{0,975;\,9}$ = 2,700 →*el 0,975 sale de 1 - 0,025*

n\α	0,995	0,975	0,95	0,9	0,5	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	
6	0.676	1.237	1.635	2.204	5.348	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	6
7	0.989	1.690	2.167	2.833	6.346	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	7
8	1.344	2.180	2.733	3.490	7.344	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	8
9	1.735	2.700	3.325	4.168	8.343	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	9
10	2.156	3.247	3.940	4.865	9.342	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	10

$$C\left(\frac{9\cdot 75,69}{19,023} < \sigma^2 < \frac{9\cdot 75,69}{2,700}\right) = 0,95$$

$C(35,81 < \sigma^2 < 252,30) = 0,95$

Ejercicio 5.16

Se midió la concentración de vitamina C en una muestra aleatoria de 9 latas de jugo de tomate comercialmente envasadas obteniéndose los siguientes datos en mg/100 g.

17 20 24 15 21 20 23 19 12

Suponiendo que estos datos constituyen una muestra aleatoria de una variable normalmente distribuida:
a) Estimar su media con un intervalo de confianza del 95%.
b) Estimar la desviación estándar de la concentración de vitamina C con un intervalo de confianza del 90%.

X = concentración de vitamina C (mg/100g)
X~N(μ; σ)

a) Estimar su media con un intervalo de confianza del 95% $\Rightarrow \hat{\mu} = \overline{X}$

```
Intervalos de confianza

Bilateral
Estimación paramétrica
```

Variable	Parámetro	Estimación	E.E.	n	LI(95%))	LS(95%))
Vit.C	Media	19,00	1,27	9	16,07	21,93
Vit.C	Mediana	20,00	1,99	9	15,40	24,60
Vit.C	Varianza	14,50	7,25	9	6,62	53,22

$$P(L_I < \mu < L_S) = 1 - \alpha$$

Cuando tenemos una variable normal con varianza conocida, el intervalos de confianza:

$$C(\overline{x} - Z\frac{\alpha}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + Z\frac{\alpha}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$C(16,07 < \mu < 21,93) = 0,95$

b) Estimar la desviación estándar de la concentración de vitamina C con un intervalo de confianza del 90%

```
Intervalos de confianza

Bilateral
Estimación paramétrica
```

Variable	Parámetro	Estimación	E.E.	n	LI(90%))	LS(90%))
Vit.C	Media	19,00	1,27	9	16,64	21,36
Vit.C	Mediana	20,00	1,99	9	16,29	23,71
Vit.C	Varianza	14,50	7,25	9	7,48	42,45

$$C(\sqrt{7,48} < \sqrt{\sigma^2} < \sqrt{42,45}) = 0,95$$

$C(2,73 < \sigma < 6,51) = 0,95$

Ejercicio 5.17

Se midió el nivel de glucemia en sangre de 16 pacientes diabéticos tratados con una nueva medicación, obteniéndose una media de 72,5 mg/dl y un desvío de 12,39 mg/dl.
Suponiendo que el nivel de glucemia se distribuye normalmente:
a) Estimar su media con un intervalo de confianza del 99%.
b) Estimar la varianza del nivel de glucemia en sangre con un intervalo de confianza del 95%.

X = nivel de glucemia en sangre (mg/dl)
$X \sim N(\mu;\ \sigma)$

a) Estimar su media con un intervalo de confianza del 99%

Cuando no conocemos σ reemplazamos por S, quedando el intervalo de confianza de la siguiente manera:

$$C(\overline{x} - t\frac{\alpha}{2}; n - 1\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t\frac{\alpha}{2}; n - 1\frac{s}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

Datos:
n = 16
$\overline{X}$= 72,5

S = 12,39

1 - α = 0,99 →*porque el intervalo de confianza es del 99%, por lo tanto, hay un 1% distribuido en las colas.*

$t_{15; \frac{0,01}{2}} = 2,947$

	or.(dos colas)												
n	0,2	0,1	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005	0,00025	0,0001	n
11	1,363	1,796	2,201	2,593	2,718	3,106	3,497	3,895	4,437	4,863	5,306	5,921	11
12	1,356	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428	3,807	4,318	4,716	5,128	5,694	12
13	1,350	1,771	2,160	2,533	2,650	3,012	3,372	3,735	4,221	4,597	4,984	5,513	13
14	1,345	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326	3,675	4,140	4,499	4,865	5,363	14
15	1,341	1,753	2,131	2,490	2,602	$\boxed{2,947}$	3,286	3,624	4,073	4,417	4,766	5,239	15

$$C(72,5 - 2,947 \cdot \frac{12,39}{4} < \mu < 72,5 + 2,947 \cdot \frac{12,39}{4}) = 0,99$$

C(63,37 < μ < 81,63) = 0,99

b) Estimar la varianza del nivel de glucemia en sangre con un intervalo de confianza del 95%

Intervalo de confianza para la varianza, por lo tanto, debemos estimar a σ^2 (intervalo depende del valor de S)

$$C(\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}; n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}}) = 1 - \alpha$$

Buscamos los valores en la tabla 6, para hallar el intervalo de confianza:

$\chi^2_{0,025}$; 15 = 27,488 → *proviene del 5% de las colas = 2×0,025 = 0,05*

$\chi^2_{0,975}$; 15 = 6,262 →*el 0,975 sale de 1 - 0,025*

$$C(\frac{15 \cdot 153,51}{27,488} < \sigma^2 < \frac{15 \cdot 153,51}{6,262}) = 0,95$$

C(83,77 < σ^2 < 367,72) = 0,95

Ejercicio 5.18

La pérdida promedio en el peso de 16 pacientes después de una semana de tratamiento es de 3,42 kg. Suponiendo que el peso se distribuye en forma normal, hallar un intervalo de confianza del 95% para la pérdida promedio de peso de la población de pacientes que reciben el tratamiento.

a) En el caso que σ es conocida, s = 0,68 kg.

b) En el caso que σ es desconocida y s = 0,68 kg.

c) Comparar la longitud de los intervalos obtenidos.

X = peso de pacientes después de una semana de tratamiento (kg)

X∼N(μ; σ)

<u>Datos:</u>

n = 16

$\overline{X}$ = 3,42

1 - α = 0,95 →*porque el intervalo de confianza es del 95%, por lo tanto, hay un 5% distribuido en las colas.*

a) En el caso que σ es conocida, s = 0,68 kg

Cuando tenemos una variable normal con varianza conocida, el intervalos de confianza:

$$C(\overline{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$$C(3,42 - Z_{\frac{0,05}{2}} \frac{0,68}{\sqrt{16}} < \mu < 3,42 + Z_{\frac{0,05}{2}} \frac{0,68}{\sqrt{16}}) = 0,95$$

C(3,42 - 1,960·0,17 < μ < 3,42 + 1,960·0,17) = 0,95

C(3,09 < μ < 3,75) = 0,95

b) En el caso que σ es desconocida y s = 0,68 kg

Cuando no conocemos σ reemplazamos por S, quedando el intervalo de confianza de la siguiente manera:

$$C(\overline{x} - t_{\frac{\alpha}{2}; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t_{\frac{\alpha}{2}; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$t_{15; \frac{0,05}{2}}$ = 2,131

	or.(dos colas)												
n	0,2	0,1	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005	0,00025	0,0001	n
11	1,363	1,796	2,201	2,593	2,718	3,106	3,497	3,895	4,437	4,863	5,306	5,921	11
12	1,356	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428	3,807	4,318	4,716	5,128	5,694	12
13	1,350	1,771	2,160	2,533	2,650	3,012	3,372	3,735	4,221	4,597	4,984	5,513	13
14	1,345	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326	3,675	4,140	4,499	4,865	5,363	14
15	1,341	1,753	2,131	2,490	2,602	2,947	3,286	3,624	4,073	4,417	4,766	5,239	15

$$C(3,42 - t_{\frac{0,05}{2}; 15} \frac{0,68}{\sqrt{16}} < \mu < 3,42 + t_{\frac{0,05}{2}; 15} \frac{0,68}{\sqrt{16}}) = 0,95$$

C(3,42 - 0,36227 < μ < 3,42 + 0,36227) = 0,95

C(3,06 < μ < 3,78) = 0,95

Ejercicio 5.19

La distribución del colesterol total en sangre en una población de niños de cierta edad se distribuye de forma normal con desvío estándar 32. ¿Qué tamaño mínimo de niños se deben observar para estimar el colesterol medio de dicha población con una aproximación ± 5 y una confianza del 90%.

X = colesterol total en sangre

X~N(μ; σ)

Datos:

σ = 32

1 - α = 0,90 → *porque el intervalo de confianza es del 90%, por lo tanto, hay un 10% distribuido en las colas.*

Aproximación ±5

$Z_{\frac{0,10}{2}}$ = 1,645

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1,645 \cdot \frac{32}{\sqrt{n}} = 5$$

Despejamos:

$$\sqrt{n} = \frac{1,645 \cdot 32}{5}$$

n = $10,528^2$

$n_{mínimo}$ = 111

Ejercicio 5.20

El nivel de Hemoglobina (Hb) en pacientes con anemia perniciosa se distribuye normalmente con desviación estándar 2,5 mg/dl. ¿Cuál es el mínimo tamaño de muestra que se debe tomar si se quiere estimar la esperanza de la población con un intervalo de confianza del 95% de longitud no mayor que 0,8?

X = nivel de Hemoglobina (Hb) en pacientes con anemia perniciosa

$X \sim N(\mu;\ \sigma)$

Datos:

σ = 2,5

1 - α = 0,95

Longitud no mayor que 0,8

$Z_{\frac{0,05}{2}}$= 1,960

$$2 \cdot Z_{\frac{\alpha}{2}} \ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 \cdot 1,960 \cdot \frac{2,5}{\sqrt{n}} \leq 0,8$$

Despejamos:

$$\sqrt{n} \geq \frac{2 \cdot 1,960 \cdot 2,5}{0,8}$$

$$n \geq 12,25^2$$

$$\mathbf{n_{mínimo} = 150}$$

Ejercicio 5.21

Generar, mediante simulación, 100 muestras aleatorias de tamaño 10 de una variable aleatoria X ~ N(50 ; 4). Para cada una de las 100 muestras, calcular el intervalo de confianza del 95% para la media. ¿Cuántos se espera que no contengan al verdadero valor de = 50? Contar cuántos son los intervalos que no contienen al valor 50.

Instrucciones para InfoStat: Aplicaciones → Didácticas → Intervalos de confianza → En Media escribir 50; en Varianza, 16. En tamaño muestral, dejar 10. El resto queda igual: 100 intervalos, Confianza 95% → Aceptar. En el gráfico de la simulación de 100 intervalos de confianza, Cobertura significa el porcentaje de intervalos que contienen a la media poblacional μ = 50. Los intervalos que no la contienen están marcados en rojo. No resulta la misma cobertura todas las veces que se efectúe una simulación, pues el intervalo del 95% significa que, de cada 100 intervalos que se construyan en las mismas condiciones, en promedio, 95 van a contener al parámetro. Observar que las longitudes de los intervalos de confianza son diferentes: esto es porque las varianzas que se usaron fueron las muestrales.