Trabajo Práctico N°2

Ejercicio 2.1

La tabla siguiente corresponde a la función de probabilidad puntual de una variable aleatoria discreta X

Valores X_i de x	1	2	3	4	5	
$P(X=x_i)$	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2	1

Calcular las siguientes probabilidades:

a)**$P(X\leq 2)$** probabilidad de que x sea menor o igual a 2
$P(X\leq 2) = p(1) + p(2) = 1/10 + 1/10 =$ 2/10

b)**$P(X>3)$** probabilidad de que x sea mayor estricto a 3
$P(X>3) = p(4) + p(5) = 3/10 + 2/10 =$ 5/10

c)**$P(1<X\leq 3)$** probabilidad de que x sea mayor estricto a 1 y menor o igual a 3
$P(1<X\leq 3) = p(2) + p(3) = 1/10 + 3/10 =$ 4/10

d)**$P(1\leq X<3)$** $= p(1) + p(2) =$ 2/10

e)**$P(X>2,3)$** = probabilidad de que x sea mayor estricto a 2,3 (p(2) No estaría incluido)
$P(X>2,3) = p(3) + p(4) + p(5) = 3/10 + 3/10 + 2/10 =$ 8/10

f)**$P(X=2,3)$** obviamente porque 2,3 no es un valor que toma la x según su recorrido, equivale a 0

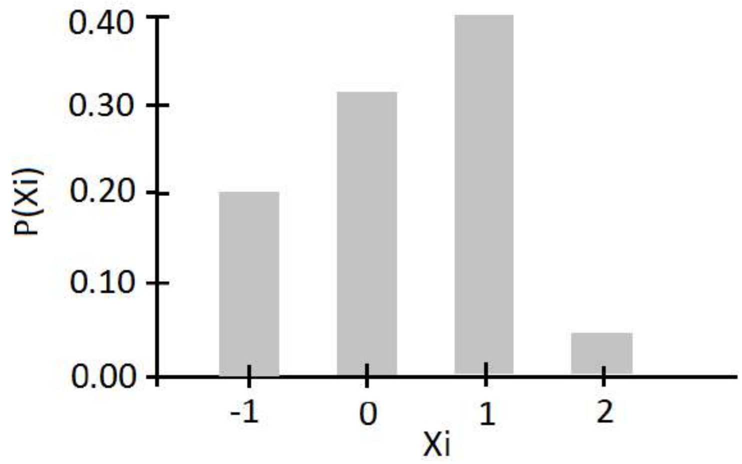
Ejercicio 2.2

Una variable aleatoria discreta X está definida por la siguiente función de probabilidad puntual:

Valores X_i de x	-1	0	1	2	
P(X=xi)	1/5	2/6	2/5	1/15	1

a) Graficar la función de probabilidad puntual.
b) Calcular y graficar la función de distribución acumulada.
c) Calcular la probabilidad de que X tome el valor 2.
d) Calcular la probabilidad de que X tome un valor menor o igual que 1,5
e) Calcular la probabilidad de que X tome un valor mayor que 0.
f) Calcular la probabilidad de que X sea mayor que 0 sabiendo que vale a lo sumo 1,5.

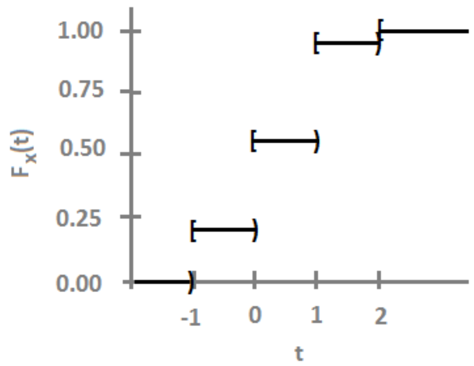
a)



Función de probabilidad puntual

b)

$$F_x(t)\begin{cases} 0 & t<-1 \\ 6/30 & -1\leq t<0 \\ 16/30 & 0\leq t<1 \\ 28/30 & 1\leq t<2 \\ 1 & t\geq 2 \end{cases}$$



c)

$$\sum_{x_i \varepsilon R_x} p(x_i) = 1/5 + 2/6 + 2/5 + p(2) = 1 \Rightarrow P(X=2)= 1/15$$

d) **P(X≤1,5) =** F(2) = 28/30 ⇨ 14/15

e) **P(X=0) =** 1 - P(X>0) = 1 - P(X≤0) = 1 - 16/30 = 14/30 ⇨ 7/15

Recordar: Función de distribución **Fx(t)= P(X≤t)**

f) **P**$[(X > 0)/(X \leq 1,5)] = \frac{P[(X>0)\cap(X\leq 1,5)]}{P(X\leq 1,5)} = \frac{P(0< X \leq 1,5)}{Fx(1,5)} = \frac{P(X=1)}{Fx(1,5)} = \frac{2/5}{14/15}$

= 3/7

(CONDICIONAL)

Ejercicio 2.3

Una compañía vende un producto químico a sus clientes en bolsas de 5 kilos. Sea la variable aleatoria X: número de bolsas que encarga un cliente. Suponga que X tiene la siguiente función de probabilidad:

Valores x_i de X	1	2	3	4

$P(X\ x\ ) =_i$	0,2	0,4	0,3	0,1

Calcular E(X) y Var(X).

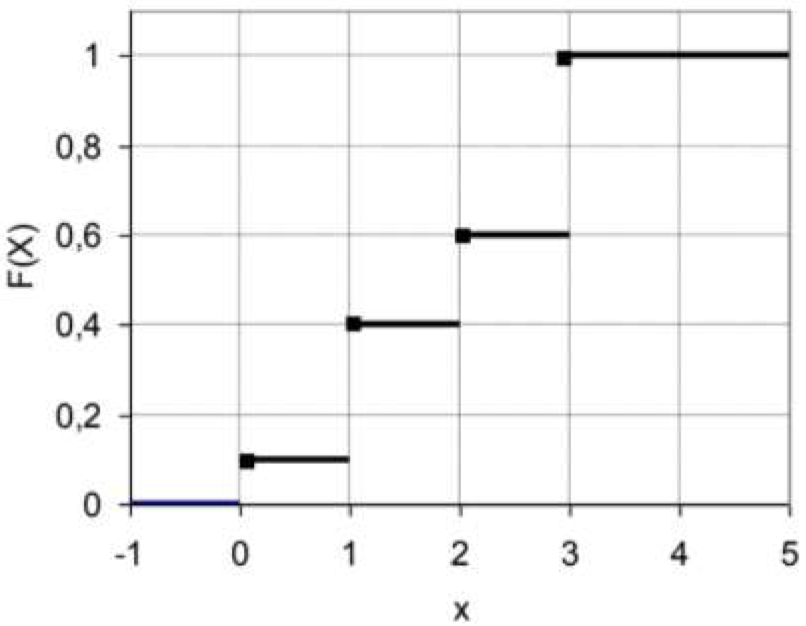
$$E(x) = \sum_{x_i \varepsilon R_x} x_i \times p(x_i) = 1\times 2/10 + 2\times 4/10 + 3\times 3/10 + 4\times 1/10 = 23/10$$

$$E(x^2) = \sum_{x_i \varepsilon R_x} x_i^2 \times p(x_i) = 1^2\times 2/10 + 2^2\times 4/10 + 3^2\times 3/10 + 4^2\times 1/10 = 61/10$$

$$\textbf{Var(x) = E(x}^2\textbf{) - [E(x)]}^2 = 61/10 - (23/10)^2 = \frac{610-529}{100} = 81/100$$

Ejercicio 2.4

Sea X una variable aleatoria discreta, tal que el gráfico de su función de distribución es
el siguiente:



a) Determinar el recorrido y la función de probabilidad de la variable aleatoria X..
b) Hallar la esperanza y la varianza de la variable aleatoria X.

a) Rx = {0; 1; 2; 3}   el recorrido se encuentra en eje de abscisa (x)

Valores Xi de X	0	1	2	3
P(X=xi)	0,1	0,3	0,2	0,4

0,4 - 0,1= 0,3
0,6 - 0,4 = 0,2
1 - 0,6 = 0,4

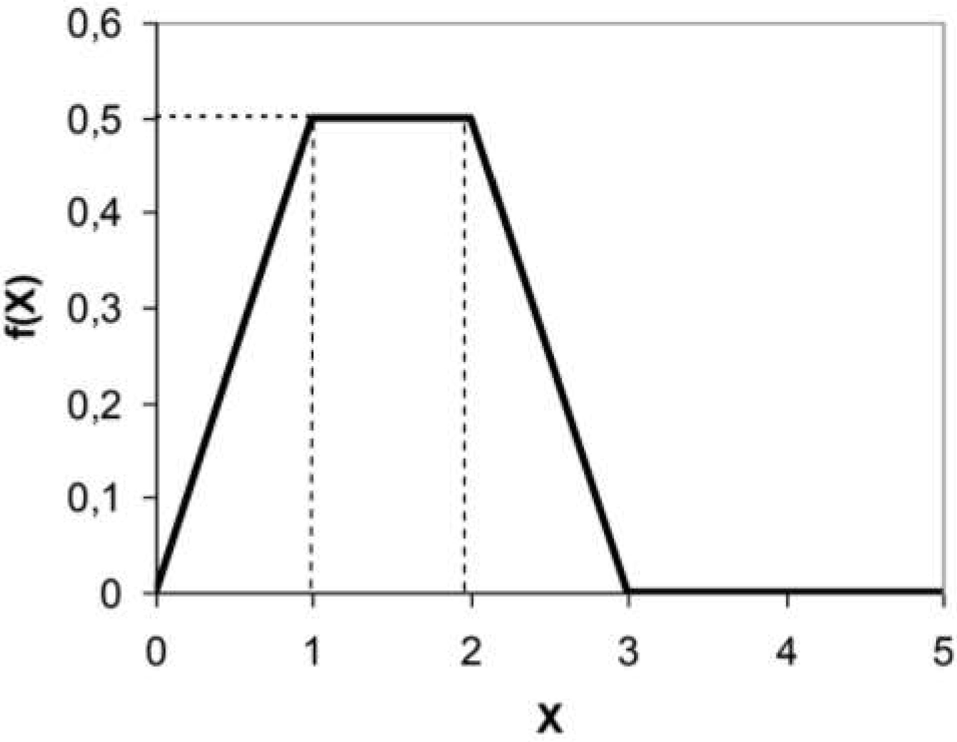
b) $E(x) = \sum_{x_i \varepsilon R_x} x_i \times p(x_i)$ = 0· 1/10 + 1· 3/10 + 2· 2/10 + 3· 4/10 = 19/10

$E(x^2) = \sum_{x_i \varepsilon R_x} x_i^2 \times p(x_i)$ = $0^2 \times 1/10 + 1^2 \times 3/10 + 2^2 \times 2/10 + 3^2 \times 4/10 = 47/10$

Var(x) = E(x²) - [E(x)]² $= 47/10 - (19/10)^2 = \frac{470-361}{100} = 109/100$

Ejercicio 2.5

Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad de probabilidad es la representada en el siguiente gráfico:



Calcular a partir del gráfico las siguientes probabilidades:

a) **$P(1<X\leq 2)$** = $\underbrace{(2-1)\cdot 0,5}^{\text{BASE} \times \text{ALTURA}}$ = 0,5

b) **$P(1\leq X< 2)$** = (2 - 1) · 0,5 = 0,5 será la misma porque en v.a. continuas toda probabilidad puntual vale 0, por lo que $P(a<X<b) = P(a<X\leq b) = P(a\leq X<b) = P(a\leq X\leq b)$.

c) **$P(X\leq 1,5)$** = 0,5 porque 1,5 se encuentra a la mitad del recorrido de la variable X (que sabemos que su valor total es 1).

d) **$P(X>1)$** lo podemos plantear como la suma del área del rectángulo y el área del triángulo, nos queda:

$P(X>1)$ $= (2-1)\cdot 0,5 + \frac{(3-2)\cdot 0,5}{2} = 0,75$

e) **$P(X=1,5)$** el ser una v.a. continua, las probabilidades puntuales son nulas = 0

pipiMorch

f)**P(0<X≤1/X≤2)** probabilidad de que x esté entre 0 y 1; sabiendo que es menor o igual a 2.

P(0<X≤1/X≤2) = $\frac{P[(0<X\leq 1)\cap(X\leq 2)]}{P(X\leq 2)} = \frac{P(0<X\leq 1)}{P(X\leq 2)} = \frac{0{,}25}{0{,}75} = \frac{1}{3}$

g) **P(1<X≤3/X≤2)** es similar al anterior

P(0<X≤1/X≤2) = $\frac{P[(1<X\leq 3)\cap(X\leq 2)]}{P(X\leq 2)} = \frac{P(1<X\leq 3)}{P(X\leq 2)} = \frac{0{,}50}{0{,}75} = \frac{2}{3}$

Ejercicio 2.6

La duración en horas de un tubo electrónico es una variable aleatoria X cuya función de distribución es:

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{t} & \text{si } t > 1 \\ 0 & \text{si } t \leq 1 \end{cases}$$

Calcular la probabilidad de que uno de tales tubos dure:
a) Menos de una hora
b) Menos de 5 horas
c) Más de 10 horas
d) Entre media hora y dos horas
e) Menos de 5 horas sabiendo que duró más de 2 horas

v.a. CONTINUA tiene la característica de que no importan tanto la desigualdad estricta
P(X<a) = P(X≤a); P(X>a) = P(X≥a)

a) $F_x(t)$ = P(t≤1) = 0

b) $F_x(t)$ = P(t≤5) = p(5) = 1 - ⅕ = ⅘

c) $F_x(t)$ = P(t>10) = 1 - P(t≤10) = 1 - (1 - 1/10) = 1/10

d) P(0,5≤t≤2) = F(2) - F(0) = (1 - ½) - 0 = ½
No restamos F(0,5) ya que este se encuentra incluido, por ende, retamos lo acumulado hasta lo anterior a 0,5.

e) P(X<5/X>2) = $\frac{P[(X<5)\cap(X>2)]}{P(X>2)} = \frac{F(5) - F(2)}{1 - P(X\leq 2)} = \frac{0{,}8 - 0{,}5}{1 - 0{,}5} = \frac{3}{5}$

Ejercicio 2.7

Para la variable aleatoria definida en el Ejercicio 2.5, a partir del gráfico calcular el valor de la media. Justificar.

Como hemos visto en el teórico, E(x) es el centro de gravedad de la distribución, el valor esperado. Por lo tanto, si es el centro de gravedad a través del gráfico podemos decir que será 1,5.

Ejercicio 2.8

La vida de un virus en determinadas condiciones biológicas es una variable aleatoria con función de distribución:

pipiMorch

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 1 \\ -\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{5}{4} & si \quad 1 \le t \le 3 \\ 1 & si \quad t > 3 \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de tales virus viva más de 1,5 horas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de tales virus viva entre 1,5 y 2,75 horas?

c) Decide si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifique.
La vida media de los virus considerados es mayor que 3 horas.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de tales virus viva menos de 2,75 horas, sabiendo que vivió más de 1,5 horas?

a) P(t>1,5) = 1 - P(t≤1,5) = 1 - (-1/4 · $(3/2)^2$ + 3/2 · 3/2 - 5/4) = $\frac{16-7}{16}$= 9/16

b) P(1,5≤t≤2,75) = F(2,75) - F(1,5) = 0,984375 - 0,4375 = 35/64

c) La afirmación es FALSA
Cuando t>3 la variable ya acumulo una probabilidad de 1, por lo que podemos deducir que la función de densidad (aunque lo desconocemos) está completamente a la izquierda de ese valor. Por ende, es imposible que E(x) sea mayor a 3.

d) P(X<2,75/X>1,5) = $\frac{P[(X<2{,}75)\cap(X>1{,}5)]}{P(X>1{,}5)} = \frac{F(2{,}75) - F(1{,}5)}{1 - P(X\le 1{,}5)}$ = 0,9722

Ejercicio 2.9

Sea X una variable aleatoria tal que E(X)=8/3 y Var(X)=5/4. Sea la variable aleatoria Y = 3/2X+5/3.

a) Calcular E(Y) y Var(Y)

b) ¿Es Var (X+Y) = Var(X) + Var (Y)? Justificar la respuesta.

a)

E(Y) = E (3/2 X + 5/3) *aplicamos propiedades 1, 2 y 3*

= E(3/2 X) + E(5/3)

= 3/2 E(x) + 5/3

= 3/2 · 8/3 + 5/3

= 4 + 5/3

E(Y) = 17/3

Var(Y) = Var (3/2 X + 5/3) *aplicamos propiedades 1, 3 y 4*

= Var(3/2 X) + Var(5/3)

= $(3/2)^2$ Var(x) + 0

= 9/4 · 5/4

Var(Y) = 45/16

pipiMorch

b) Chequeamos si se cumple Var (X+Y)= Var (X)+ Var (Y) es decir, si son X e Y v.a. independientes

siendo Var(x) = 5/4

$$\begin{aligned} Var(X+Y) &= Var(X + 3/2\,X + 5/3) \\ &= Var(5/2\,X + 5/3) \\ &= Var(5/2\,X) + Var(5/3) \\ &= (5/2)^2\,Var(x) + 0 \\ &= 25/4\,Var(x) + 0 \end{aligned}$$

$Var(X+Y) = 125/16$

$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = 5/4 + 45/16 = 65/16$ Vemos que X e Y no son ind.

Ejercicio 2.10

Sean X e Y variables aleatorias discretas e independientes tales que Var (Y) = 2 y la función de probabilidad de X es:

Valores x_i de X	-2	0	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

a) Calcular la varianza de la variable X.
b) Calcular Var (3X − 2Y + 5)

a) $E(x) = (-2) \cdot 1/6 + 0 \cdot 3/6 + 2 \cdot 2/6 = 1/3$

$E(x^2) = (-2)^2 \times 1/6 + 0^2 \times 3/6 + 2^2 \times 2/6 = 2$

$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = 2 - (1/3)^2 = 17/9$

b) Sabemos que Var(x)= 2 X e Y son v.a. ind

$$\begin{aligned} Var(3X - 2Y + 5) &= \\ &= Var(3X) + Var(2Y) + Var(5) \\ &= 3^2\,Var(X) + 2^2\,Var(Y) + 0 \\ &= 9 \cdot \mathbf{17/9} + 4 \cdot \mathbf{2} \end{aligned}$$

$Var(3X - 2Y + 5) = 25$

Clase de Variable Aleatoria Continua, explicación de ejercicios 2.5 y 2.8:
https://youtu.be/kzrIZDyR18I