Ejercicios Adicionales TP Nº4

Ejercicio 1

Sea X: número de mielocitos en un determinado volumen de sangre de individuos con infecciones agudas una variable aleatoria de Poisson. Se tomó una muestra aleatoria de X y se observaron las siguientes frecuencias:

Xi	0	1	2	3	4	5 ó más
frecuencia	41	64	52	26	11	6

Sean los sucesos:

A: hay por lo menos un mielocito en el volumen considerado $P(X \geq 1)$

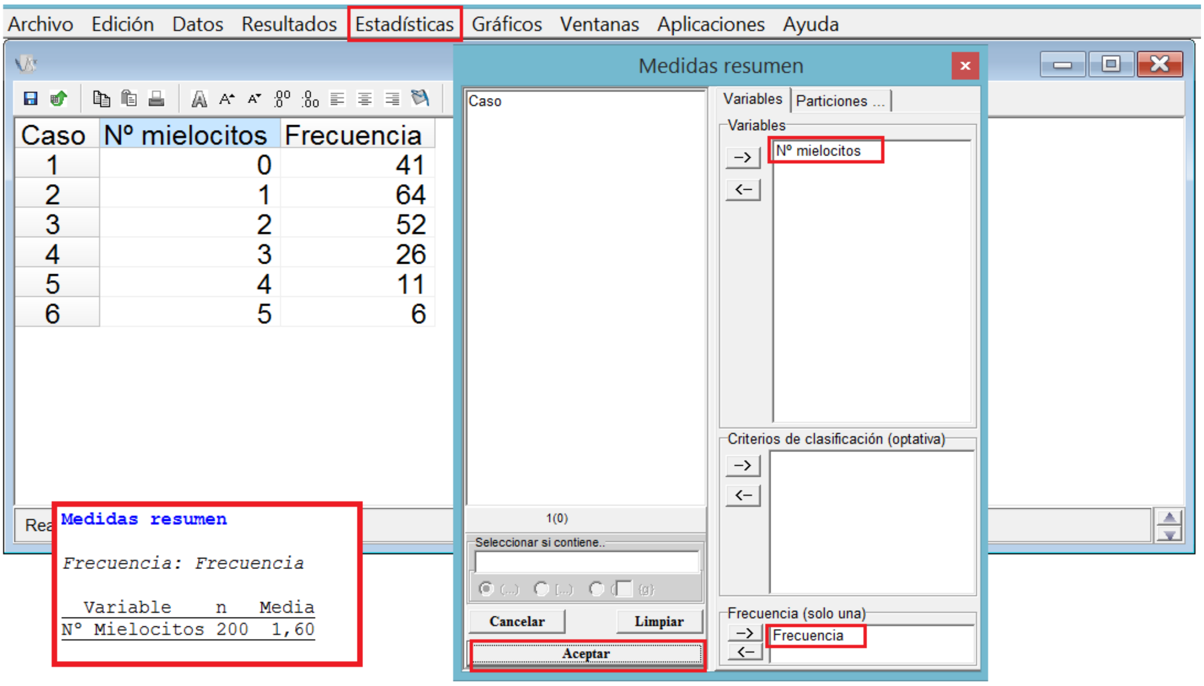
B: hay a lo sumo tres mielocitos en el volumen considerado $P(X \leq 3)$

Estimar P(A/B), P(A') y P(A' U B')

X = número de mielocitos en volumen de sangre

$$X \sim P(\lambda) \Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{x}$$

Entonces, insertamos los datos en **Infostat**:



Utilizando tabla 4: Función de distribución de Poisson

$$\hat{P}(A/B) \Rightarrow \frac{\hat{P}(A \cap B)}{\hat{P}(B)} \Rightarrow \frac{\hat{P}(1 \leq X \leq 3)}{\hat{P}(X \leq 3)} = \frac{F(3) - F(0)}{F(3)} = \frac{0{,}9212 - 0{,}2019}{0{,}9212} = \mathbf{0{,}7808}$$

$\hat{P}(A') \Rightarrow 1 - \hat{P}(A) = 1 - \hat{P}(X \geq 1) = 1 - [1 - \hat{P}(X < 1)] = 1 - [1 - F_X(0)] = 1 - 0{,}7981 =$ **0,2019**

$\hat{P}(A' \cup B')$ para este cálculo utilizamos la ***LEY DE MORGAN***

$\hat{P}(\bar{A} \cup \bar{B}) \Rightarrow \hat{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \hat{P}(A \cap B)$ $\Rightarrow 1 - (0{,}9212 - 0{,}2019) = 1 - 07193 =$ **0,2807**

Ejercicio 2

Se investiga la posibilidad de que un dado no esté equilibrado. Se lo tira 600 veces y se observa la frecuencia con que aparece cada número, obteniéndose:

Xi	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	105	97	94	102	104	98

Sea la variable aleatoria X: número que sale al tirar una vez el dado.
a) Hallar E(X) y Var(X) suponiendo que los 6 valores del recorrido de X son igualmente probables.
b) Calcular la media y la varianza de la muestra obtenida.
c) Calcular los errores absolutos y relativos de las estimaciones efectuadas.

X: número que sale al tirar una vez el dado

X~Bi(m, p)

Sabiendo que la cantidad de veces que se tira el dado son 600 calculamos la media $(\overline{x})$

$$\widehat{E(X)} = \overline{x} = \frac{1 \cdot 105 + 2 \cdot 97 + 3 \cdot 94 + 4 \cdot 102 + 5 \cdot 104 + 6 \cdot 98}{600} = \mathbf{3{,}495}$$

Para el cálculo de la varianza de la muestra debemos estimar p siendo $\widehat{E(X)} = \overline{x}$

$$\hat{p} = \frac{\overline{x}}{m} \Rightarrow \hat{p} = \frac{3{,}495}{600} = 0{,}005825$$

$s^2 \Rightarrow$

$$\frac{(1-3{,}495)^2 \cdot 105 + (2-3{,}495)^2 \cdot 97 + (3-3{,}495)^2 \cdot 94 + (4-3{,}495)^2 \cdot 102 + (5-3{,}495)^2 \cdot 104 + (6-3{,}495)^2 \cdot 98}{(600-1)}$$

$$= \frac{1769{,}985}{599} = \mathbf{2{,}95}$$

Ejercicio 3

Para el estudio de ciertos microorganismos presentes en una laguna, se tomaron 1000 muestras de 2 cm³ cada una, obteniéndose los siguientes resultados:

x: nº de individuos por muestra	0	1	2	3	4	5	6	7	8 ó más
nº de muestras	75	160	220	230	160	90	40	20	5

a) ¿Qué distribución puede suponerse que sigue?
b) Hallar la distribución de frecuencias esperadas.
c) Estimar la probabilidad de que en una muestra de 3 cm³ se encuentren al menos 3 y no más de 6 microorganismos.

a) Esta variable aleatoria sigue una distribución de Poisson, ya que tiene un recorrido finito y numerable.

b) Para hallar la distribución de frecuencias esperadas utilizamos la siguiente fórmula:

$$\widehat{fk} := n \cdot P(\widehat{X = k})$$

Entonces:

X = número de microorganismos presentes en 2cm^3

$$X \sim P(\lambda_X) \Rightarrow \widehat{\lambda} = \overline{x} = 2{,}80$$

Medidas resumen

Frecuencia: Frecuencia

Variable	n	Media
n° microorganismos	1000	2,80

Utilizando app Probability Distributions:

$\widehat{f_0}$:= 1000·P(X=0) = 1000·0,06081 = 60,81

$\widehat{f_1}$:= 1000·P(X=1) = 1000·0,17027 = 170,27

$\widehat{f_2}$:= 1000·P(X=2) = 1000·0,23838 = 238,38

$\widehat{f_3}$:= 1000·P(X=3) = 1000·0,22248 = 224,8

$\widehat{f_4}$:= 1000·P(X=4) = 1000·0,15574 = 155,74

$\widehat{f_5}$:= 1000·P(X=5) = 1000·0,08721 = 87,21

$\widehat{f_6}$:= 1000·P(X=6) = 1000·0,04070 = 40,7

$\widehat{f_7}$:= 1000·P(X=7) = 1000·0,01628 = 16,28

$\widehat{f_8}$:= 1000·P(X≥8) = 1000·0,00813 = 8,13

x: n° de individuos por muestra	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8 ó más**
$\widehat{fx}$	60,81	170,27	238,38	224,80	155,74	87,21	40,70	16,28	8,13
Fr. originales	**75**	**160**	**220**	**230**	**160**	**90**	**40**	**20**	**5**

c) Redefinimos la v.a. **Y = número de microorganismos presentes en 3cm^3**

$$Y \sim P(\lambda_Y) \Rightarrow \lambda_Y = 4{,}2$$

2cm^3 ------- promedio(λ) 2,8

3cm^3 ------- x= promedio(λ) 4,2

Utilizando tabla 4. Función de distribución de Poisson

$\widehat{P}$(3≤Y≤6) ⇒$F_Y(6) - F_Y(2)$ = 0,8675 - 0,2102 = **0,6573**

Ejercicio 4

Una compañía transportadora lleva 30 cajas de una cierta vacuna. Los siguientes datos corresponden al número de ampollas rotas por caja en el total del trayecto:

0	0	1	1	1	1	0	2	2	0	2	3	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	2	3	3

a) Construir la tabla de frecuencias.
b) Definir la variable aleatoria, indicar su recorrido y decir qué distribución sigue.
c) Indicar el valor de sus parámetros ó, el de las estimaciones de los mismos.

a) Tabla de frecuencias:

Valores X_i	**0**	**1**	**2**	**3**
Frecuencias	10	13	4	3

b) La v.a. sigue una distribución binomial porque es dicotómica (las ampollas o se encuentran rotas o se encuentran "sanas"), se repite el experimento y la probabilidad de que el evento ocurra en todas las unidades experimentales no cambia a la largo de la experiencia.
Siendo su recorrido: **R_X={0; 1; 2; 3}**

X = número de ampollas rotas por caja de un total 3
X~Bi(m; p)

c) El parámetro **m** la cantidad de veces que se repite el experimento, entonces **m= 3**
En cuanto a ***p*** que es la probabilidad de éxito (en nuestro caso, ampollas rotas) lo podemos estimar de la siguiente manera:

$$\bar{x}=\frac{0\cdot 10+1\cdot 13+2\cdot 4+3\cdot 3}{30}=1$$

$$\hat{p}=\frac{\bar{x}}{m}\Rightarrow \hat{p}=\frac{1}{3}$$

Ejercicio 5

Se tomó una muestra aleatoria de X: número de pacientes que se curan de un grupo de 5 personas que recibieron un tratamiento. Se observaron las siguientes frecuencias:

x_i	0	1	2	3	4	5
frecuencia	4	22	35	25	12	2

Sean los sucesos:
A: se curaron por lo menos 2 pacientes $P(X\geq 2)$
B: se curaron a lo sumo 4 pacientes $P(X\leq 4)$

a) Estimar P(A/B)
b) En base a lo calculado en a), ¿puede suponerse que A y B son sucesos independientes?

X = número de pacientes curados de un grupo de 5
X~Bi(5; p)

a)
$$\bar{x}=\frac{0\cdot 4+1\cdot 22+2\cdot 35+3\cdot 25+4\cdot 12+5\cdot 2}{100}=2{,}25$$

$$\hat{p}=\frac{\bar{x}}{m}=\frac{2{,}25}{5}=0{,}45$$

Utilizando tabla 2: Función de Distribución Binomial

$\hat{P}$(A/B) = $\frac{\hat{P}(A \cap B)}{\hat{P}(B)} = \frac{\hat{P}(2 \leq X \leq 4)}{\hat{P}(X \leq 4)} = \frac{F(4) - F(1)}{F(4)} = \frac{0{,}9815 - 0{,}2562}{0{,}9815} =$ **0,739**

b) **Los sucesos A y B no son independientes porque es una probabilidad condicional.**
Es decir, que cambia la probabilidad de un suceso A cuando se sabe que otro suceso B ha ocurrido.

Ejercicio 6

Los siguientes datos corresponden a la altura, en metros, de 12 árboles de cierta especie elegidos al azar:

17	16	18	20	14	16	14	18	20	13	19	**20**

Ordenamos: {13; 14; 14; 16; 16; 17; 18; 18; 19; 20; 20; 20 }

Calcular:
a) El rango o recorrido.
b) El centro del recorrido.
c) La mediana.
d) La media muestral.
e) El desvío estándar muestral.

Medidas resumen

Frecuencia: frecuencia

Variable	Media	D.E.	Mín	Máx	Mediana
altura de árboles	17,08	2,50	13,00	20,00	17,50

a) **Rango** ⇒ rg(x):= *Xmax* - *Xmin* = 20 - 13 = **7 m**

b) **Centro del recorrido** ⇒CR(x) = $\frac{Xmax + Xmin}{2}$= **16,5 m**

Ejercicio 7

La tabla siguiente de la distribución de frecuencias de la variable aleatoria X: cantidad de accidentes diarios de tránsito registrados en una ciudad durante 300 días:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7 ó más
frecuencia	0	3	101	116	60	15	3	2

a) Ajustar una distribución de Poisson estimando previamente el parámetro λ.
b) Estimar la probabilidad de que en un día haya a lo sumo 3 accidentes.
c) Estimar la probabilidad de que en un día haya 2 ó ningún accidente.

a) X = número de accidentes diarios registrados durante 300 días

$X \sim P(\lambda_x)$

$E(x) = \lambda \rightarrow \hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{900}{300} =$ **3**

Utilizamos la tabla 4: Función de Distribución Poisson

b) $\hat{P}(X \leq 3)$= **0,6472**

c)

A: en un día haya 2 accidente
B: en un día haya 0 accidente

$\widehat{P}(A \cup B) = \widehat{P}(A) + \widehat{P}(B) \Rightarrow \widehat{P}(X=2) + \widehat{P}(X=0) \Rightarrow 0{,}2240 + 0{,}0498 =$ **0,2738**