Ejercicios Adicionales TP Nº6

Ejercicio 1

La concentración de fósforo inorgánico en el suero sanguíneo de caballos de cierta raza es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con media 3,4 mg/100 ml. Un grupo de 25 caballos fue sometido durante 2 meses a un tratamiento que se suponía aumentaba la cantidad de fósforo inorgánico. La concentración promedio obtenida para ese grupo fue de 3,96 mg/100 ml con una varianza de 1,96 $(mg/100\ ml)^2$. Verificar si el aumento de la concentración de fósforo producido por el tratamiento es significativo, indicando:

a) ¿Qué decisión se toma con un nivel de significación del 5%? Indicar: las variables aleatorias, las suposiciones necesarias, las hipótesis: nula y alternativa, el estadístico de prueba y la zona de rechazo.

b) ¿Debe modificarse la decisión si se elige un nivel de significación del 1%?

a)

Planteamos la variable aleatoria:

X: concentración de fósforo inorgánico (mg/100 ml) en suero sanguíneo de caballo
Sigue una distribución normal

Planteamos el test de hipótesis, suponiendo que el tratamiento aumenta la cantidad de fósforo inorgánico:

Test de Student (Unilateral derecho)

VARIANZA DESCONOCIDA

$$H_1: \underbrace{\boxed{\mu}}_{\text{tratados}} > \underbrace{\boxed{\mu_0}}_{\text{inicialmente (sin tratar)}}$$

$$H_0: \mu \leq \mu_0$$

Planteamos al estadístico de prueba:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

tenemos un nivel de significación del 5% $(\alpha = 0,05)$

$$T = \frac{3,96 - 3,4}{\frac{1,4}{\sqrt{25}}} = \frac{0,56}{0,28} = 2$$

La zona de rechazo correspondiente, ya que el nivel de significación es del 5%:

pipiMorch

$$Z.R. = \{T_m \in R : T_m \geq t_{n-1,\alpha}\}$$

es de una cola

$$Z.R. = \{T_m \in R : T_m \geq t_{24,\,0.05} = 1,711\}$$

	α(una cola)											
n	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005	0,00025	0,0001	n
21	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819	4,110	4,493	21
22	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792	4,077	4,452	22
23	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,768	4,047	4,415	23
24	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745	4,021	4,382	24
25	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725	3,996	4,352	25

Evidentemente el estadístico cae en la zona de rechazo (1,790 ≥ 1,711), por lo que se rechaza H_0, es decir, efectivamente hay un aumento significativo de la concentración de fósforo producido por el tratamiento.

b)

Para ello calculamos el p-valor: $p = P(t_{n-1} \geq T_m)$

$p = P(t_{24} \geq 1,79)$

	α(una cola)											
n	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005	0,00025	0,0001	n
21	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819	4,110	4,493	21
22	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792	4,077	4,452	22
23	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,768	4,047	4,415	23
24	0,857	1,318	1,71	1,790 64	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745	4,021	4,382	24
25	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725	3,996	4,352	25

$$0,025 < p - valor < 0,05$$ *(se informa p-valor < 0,05)*

Si se elige un nivel de significación del 1% → $\alpha = 0,01$

p-valor > α No se rechaza H_0

En este caso, no hay evidencia suficiente como para rechazar H_0, por lo tanto, no hay un aumento significativo de la concentración de fósforo producido por el tratamiento.

Ejercicio 2

Se efectuó un experimento para investigar acerca de la acción de la temperatura del baño químico sobre la cantidad de material removido de ciertas piezas. Se observaron un total de 6 piezas a 120°C, obteniéndose una cantidad promedio de metal removido de 2,6 mm, y una varianza muestral de 0,219 mm^2. De otra muestra de 6 piezas de 90° C se obtuvo una cantidad promedio de metal removido de 2,1 mm, y una varianza de 0,178 mm^2.
Se desea verificar si con 120° C hay un aumento en la cantidad media de metal removido. Indicar la decisión a la que se arriba, basándose en el cálculo del nivel justo de significación.

Planteamos las variables aleatorias:

X_1: acción de la 120°C sobre la cantidad de material removido de ciertas piezas
X_2: acción de la 90°C sobre la cantidad de material removido de ciertas piezas

Suponemos independencia

Planteamos el test de hipótesis, sabiendo que lo que se desea verificar es si con 120ºC hay un aumento en la cantidad media de metal removido.

Test de Student (Unilateral derecho)

DESVÍOS DESCONOCIDOS

$$H_1: \underbrace{\boxed{\mu_1}}_{\text{remoción a 120ºC}} > \underbrace{\boxed{\mu_2}}_{\text{remoción a 90ºC}}$$

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$$

Verificamos los supuestos del test: ***HOMOCEDASTICIDAD***

Se pone a prueba:

$$H_0: \sigma_1 = \sigma_2 \qquad H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$$

Calculamos el estadístico de prueba:

$$F_m = \frac{S^2_{Mayor}}{S^2_{Menor}} \sim F_{n\,Mayor - 1\,;\; m\,Menor - 1} \quad si\ vale\ H_0$$

$$F_m = \frac{0{,}219}{0{,}178} = 0,041$$

Si consideramos un $\alpha = 0,20$

$$F_{5,5;\frac{0,20}{2}} = 3,45$$

Grados de libertad en el numerador (n_1)

Grados de libertad en el denominador (n_2)

	α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
1	0,10	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	60,71	61,22	61,74
1	0,05	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	243,91	245,95	248,01
1	0,01	4052,18	4999,50	5403,35	5624,58	5763,65	5858,99	5928,36	5981,07	6022,47	6055,85	6106,32	6157,28	6208,73
2	0,10	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,41	9,42	9,44
2	0,05	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45
2	0,01	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,42	99,43	99,45
3	0,10	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,20	5,18
3	0,05	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66
3	0,01	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,05	26,87	26,69
4	0,10	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,90	3,87	3,84
4	0,05	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80
4	0,01	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37	14,20	14,02
5	0,10	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,27	3,24	3,21
5	0,05	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56
5	0,01	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89	9,72	9,55

Se rechaza la homogeneidad de varianzas con un nivel $\alpha = 0.20$ si:

$$Z.R. = \left\{F_m \in R : F_m \geq F_{n\,Mayor - 1,\, n\,menor - 1;\, \alpha/2}\right\}$$

Entonces, siendo $0{,}041 < 3{,}45$ no se rechaza H_0

Podemos suponer que ambas variables ***son homogéneas*** $\sigma_1 \approx \sigma_2$

Una vez comprobada la homogeneidad , podemos seguir con el respectivo test

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{Sp\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2} \; si\ vale\ H_0$$

$$Sp^2 = \frac{(n-1)\cdot S^2_{x1} + (m-1)\cdot S^2_{x2}}{n+m-2} = \frac{(6-1)\cdot 0{,}219 + (6-1)\cdot 0{,}178}{6+6-2} = \frac{1{,}985}{10} = 0{,}1985$$ ***aplicamos*** $\sqrt{Sp^2}$

Planteamos el estadístico de prueba:

$$T_m = \frac{2{,}6 - 2{,}1}{0{,}446\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}} = \frac{0{,}5}{0{,}257} = \mathbf{1{,}945}$$

Calculamos el p-valor: $p = P(t_s \geq T_m)$ ***siendo s = n + m - 2***

$p = P(t_{10} \geq 1,945)$

	α(una cola)											
n	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005	0,00025	0,0001	n
6	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959	6,788	8,025	6
7	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408	6,082	7,063	7
8	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041	5,617	6,442	8
9	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781	5,291	6,010	9
10	0,879	1,372	1,8 1,945	228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587	5,049	5,694	10

$$0,025 < p - valor < 0,05$$

Entonces, decimos que p < 0,05 sabiendo que se considerará significativa toda probabilidad de error menor del 5%.

p-valor ≤ α se rechaza H_0

Podemos decir, basándonos en el cálculo del nivel justo de significación, con 120° C hay un aumento en la cantidad media de metal removido.

Ejercicio 3

Se dispone de 2 métodos de precipitación de ciertas partículas en una sustancia. Se mide el peso del precipitado en gramos. Con el método A se efectuaron 15 determinaciones y se obtuvo una media de 2,18 g y una varianza de 0,33 g^2. Con el método B se hicieron 10 determinaciones y se obtuvo una media de 1,71 g y una varianza de 0,25 g^2. Se quiere decidir si con el método A, el peso medio del precipitado es mayor que con el B.
Hallar el nivel justo de significación e indicar la decisión en términos del problema.

Plantamos las variables aleatorias:

X_1: medición del peso del precipitado en gramos, con el método A
X2: medición del peso del precipitado en gramos, con el método B

Suponemos independencia

Planteamos el test de hipótesis, sabiendo que lo que se quiere decidir es, si con el método A, el peso medio del precipitado es mayor que con el B.

Test de Student (Unilateral derecho)

DESVÍOS DESCONOCIDOS

$$H_1: \boxed{\mu_1} > \boxed{\mu_2}$$

método A   método B

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$$

Verificamos los supuestos del test: ***HOMOCEDASTICIDAD***

Se pone a prueba:

$$H_0: \sigma_1 = \sigma_2 \qquad\qquad H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$$

Calculamos el estadístico de prueba:

$$F_m = \frac{S^2_{Mayor}}{S^2_{Menor}} \sim F_{n\,Mayor - 1\ ;\ m\,Menor - 1} \quad si\ vale\ H_0$$

$$F_m = \frac{0{,}33}{0{,}25} = 1,32$$

Si consideramos un $\alpha = 0,20$

$$F_{14,\,9;\,\frac{0{,}20}{2}} = 2,12$$

	α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	**0,10**	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42
9	**0,05**	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
9	**0,01**	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26
10	**0,10**	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32
10	**0,05**	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
10	**0,01**	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
11	**0,10**	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25
11	**0,05**	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
11	**0,01**	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
12	**0,10**	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19
12	**0,05**	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
12	**0,01**	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30
13	**0,10**	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14
13	**0,05**	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
13	**0,01**	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10
14	**0,10**	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10
14	**0,05**	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
14	**0,01**	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94

Se rechaza la homogeneidad de varianzas con un nivel $\alpha = 0.20$ si:

$$Z.R. = \left\{F_m \in R : F_m \geq F_{n\,Mayor - 1,\, n\,menor - 1;\, \alpha/2}\right\}$$

Entonces, siendo 1,32 < 2,12 no se rechaza H_0

Podemos suponer que ambas variables ***son homogéneas*** $\sigma_1 \approx \sigma_2$

Una vez comprobada la homogeneidad , podemos seguir con el respectivo test

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{Sp\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2} \quad si\ vale\ H_0$$

$$Sp^{2} = \frac{(n-1)\cdot S_{x1}^{2} + (m-1)\cdot S_{x2}^{2}}{n+m-2} = \frac{(15-1)\cdot 0{,}33 + (10-1)\cdot 0{,}25}{15+10-2} = \frac{6{,}87}{23} = 0{,}299$$ ***aplicamos*** $\sqrt{Sp^2}$

Planteamos el estadístico de prueba:

$$T_m = \frac{2{,}18 - 1{,}71}{0{,}547\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{10}}} = \frac{0{,}47}{0{,}223} = \mathbf{2{,}108}$$

Calculamos el p-valor: $p = P(t_s \geq T_m)$ ***siendo s = n + m - 2***

$p = P(t_{23} \geq 2,108)$

	α(una cola)											
n	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005	0,00025	0,0001	n
21	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819	4,110	4,493	21
22	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792	4,077	4,452	22
23	0,858	1,319	1,714	2,0	2,108 500	2,807	3,104	3,485	3,768	4,047	4,415	23
24	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745	4,021	4,382	24
25	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725	3,996	4,352	25

$$0,01 < p - valor < 0,025$$

Entonces, decimos que p < 0,025 sabiendo que se considerará significativa toda probabilidad de error menor del 5%.

p-valor < α se rechaza H_0

Podemos decir, basándonos en el cálculo del nivel justo de significación, con el método A, el peso medio del precipitado es mayor que con el B.

Ejercicio 4

El peso de los pollos de una raza A tiene una varianza de 0,10 kg^2 y el de la raza B de 0,15 kg^2. Se toman muestras del mismo tamaño de pollos de cada una de las razas y se obtiene una media para el peso de la raza A de 1,7 kg, y para la raza B de 2 kg.

a) ¿Al nivel del 5%, se puede decidir que las 2 razas tienen distinto peso medio, si se toman muestras de 10 pollos?

b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo que deben tener las muestras para decidir que los pollos de tipo B tienen peso medio mayor que los de tipo A, con probabilidad de error del 5%?

a)

Planteamos las variables aleatorias:

X_1: peso (kg) de pollos de la raza A

X_2: peso (kg) de pollos de la raza B

Suponemos independencia

Planteamos el test de hipótesis, sabiendo que lo que se quiere decidir es, si las 2 razas tienen distinto peso medio (tomando muestras de 10 pollos).

H_1: $\boxed{\mu_1} \neq \boxed{\mu_2}$

pollos de la raza A — pollos de raza B

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

Test de Student (Bilateral)

DESVÍOS DESCONOCIDOS

Verificamos los supuestos del test: ***HOMOCEDASTICIDAD***

Se pone a prueba:

$$H_0: \sigma_1 = \sigma_2 \qquad\qquad H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$$

Calculamos el estadístico de prueba:

$$F_m = \frac{S^2_{Mayor}}{S^2_{Menor}} \sim F_{n\,Mayor - 1\,;\ m\,Menor - 1} \quad si\ vale\ H_0$$

$$F_m = \frac{0{,}15}{0{,}10} = 1,5$$

Si consideramos un $\alpha = 0,20$

$$F_{9,9;\frac{0{,}20}{2}} = 2,44$$

	α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
9	0,10	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,38	2,34
9	0,05	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01
9	0,01	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96
10	0,10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,28	2,24
10	0,05	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85
10	0,01	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56

Se rechaza la homogeneidad de varianzas con un nivel $\alpha = 0.20$ si:

$$Z.R. = \left\{F_m \in R : F_m \geq F_{n\,Mayor -1,\, n\,menor -1;\, \alpha/2}\right\}$$

Entonces, siendo 1,5 < 2,44 no se rechaza H_0

Podemos suponer que ambas variables **son homogéneas** $\sigma_1 \approx \sigma_2$

Una vez comprobada la homogeneidad , podemos seguir con el respectivo test

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{Sp\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2} \quad si\ vale\ H_0$$

$$Sp^2 = \frac{(n-1)\cdot S^2_{x1} + (m-1)\cdot S^2_{x2}}{n+m-2} = \frac{(10-1)\cdot 0{,}10\ +\ (10-1)\cdot\ 0{,}15}{10+10-2} = \frac{2{,}25}{18} = 0{,}125$$ **aplicamos** $\sqrt{Sp^2}$

Planteamos el estadístico de prueba:

$$T_m = \frac{1{,}7\ -\ 2}{0{,}354\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = \frac{-0{,}3}{0{,}158} = \mathbf{-1{,}899}$$

Calculamos el p-valor: $p = P(|t_s| \geq |T_m|)$ ***siendo s = n + m - 2***

pipiMorch

$p = P(t_{18} \geq 1,899)$

	or.(dos colas)												
n	0,2	0,1	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005	0,00025	0,0001	n
16	1,337	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921	3,252	3,581	4,015	4,346	4,682	5,134	16
17	1,333	1,740	2,110	2,458	2,567	2,898	3,222	3,543	3,965	4,286	4,609	5,044	17
18	1,330	1,7[illegible] 1,899	[illegible]01	2,445	2,552	2,878	3,197	3,510	3,922	4,233	4,547	4,966	18
19	1,328	1,729	2,093	2,433	2,539	2,861	3,174	3,481	3,883	4,187	4,491	4,897	19
20	1,325	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153	3,455	3,850	4,146	4,443	4,837	20

$$0,05 < p - valor < 0,1$$

Entonces, decimos que p < 0,1 sabiendo que se considerará significativa toda probabilidad de error menor del 5%.

p-valor > α No se rechaza H_0

Podemos decir, basándonos en el cálculo del nivel justo de significación, las 2 razas no tienen diferencias en el peso medio.

Ejercicio 5

Se eligió al azar un grupo de 10 individuos hipertensos y a cada uno de ellos se les midió la presión arterial antes y después de recibir una droga. A partir de esos datos se obtuvo que la presión media antes de recibir la droga fue de 17,2 mmHg, mientras que, después de recibir la droga, fue de 14,4 mmHg. La varianza de la disminución de presión arterial fue 20,3 mmHg^2. Decidir, con un nivel de significación del 5%, si, en promedio, la droga disminuye la presión arterial.

Planteamos las variables aleatorias:

X_1: presión de individuos hipertensos antes de recibir la droga
X_2: presión de hipertensos después de recibir la droga

No importa la distribución de X_1 y X_2 sino la distribución de la diferencia: $D \sim N(\mu_D, \sigma_D)$
Es un test de Student

Test Unilateral izquierdo (Contraste para la diferencia de muestras apareadas)

$$H_1: \mu_D < \mu_0$$

$$H_0: \mu_D \geq \mu_0$$

Datos:

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \bar{d} = 2,8\, mmHg$

$S_D^2 = 20,3\, mmHg^2$

$n = 10$

Calculamos el estadístico de prueba:

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}}$$

$$T_m = \frac{2,8 - 0}{4,51\left(\sqrt{\frac{1}{10}}\right)} = \frac{2,8}{1,425} = 1,965$$

Realizamos el cálculo del p-valor: $p = P(t_{n-1} \leq -T_m)$

$p = P(t_9 \leq -1,965)$

$$0,025 < p - valor < 0,05$$

n	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005	0,00025	0,0001	n
	α(una cola)											
6	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959	6,788	8,025	6
7	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408	6,082	7,063	7
8	0,889	1,397	1,860	2.306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041	5,617	6,442	8
9	0,883	1,383	1,8 1,965	262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781	5,291	6,010	9
10	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587	5,049	5,694	10

Entonces, decimos que p < 0,05 sabiendo que se considerará significativa toda probabilidad de error menor del 5%.

p-valor ≤ α Se rechaza H_0

Podemos decir, basándonos en el cálculo del nivel justo de significación, en promedio, la droga disminuye la presión arterial.

Ejercicio 6

Se supone que las determinaciones de glucemia en personas normales por un método A dan medias mayores que las obtenidas por otro método B. Para poner a prueba esa hipótesis se tomó un grupo de 5 personas y, para cada una de ellas, se hizo la determinación de glucemia por ambos métodos, obteniéndose los siguientes resultados en g/litro:

Método	Persona				
	1	2	3	4	5
A	0,85	0,90	1,00	1,10	0,95
B	0,80	0,82	1,00	0,95	0,88

Diferencias $(\bar{d})$	0,05	0,08	0	0,15	0,07

¿A qué conclusión se llega si se trabaja con un nivel de significación del 5%?

pipiMorch

Planteamos las variables aleatorias:

X_1: determinación de glucemia por método A
X_2: determinación de glucemia por método B

No importa la distribución de X_1 y X_2 sino la distribución de la diferencia: D ~ N(μ_D, σ_D)
Es un test de Student

Test Unilateral derecho (Contraste para la diferencia de muestras apareadas)

$$H_1: \mu_D > \mu_0$$

$$H_0: \mu_D \leq \mu_0$$

$\overline{d} = 0,07$

$S_D = 0,05$

$n = 5$

Calculamos el estadístico de prueba:

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}}$$

$$T_m = \frac{0{,}07 - 0}{0{,}05\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)} = \frac{0{,}07}{0{,}022} = 3{,}182$$

Realizamos el cálculo del p-valor: $p = P(t_{n-1} \geq T_m)$

$p = P(t_4 \geq 3,182)$

	α(una cola)											
n	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005	0,00025	0,0001	n
1	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,7	127,3	318,3	636,6	1273,2	3183,1	1
2	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,089	22,327	31,599	44,705	70,700	2
3	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,215	12,924	16,326	22,204	3
4	0,941	1,533	2,132	2,7[illegible] 3,182	[illegible]47	4,604	5,598	7,173	8,610	10,306	13,034	4
5	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869	7,976	9,678	5

$$0,01 < p - valor < 0,025$$

Entonces, decimos que p < 0,025 sabiendo que el nivel de significación es del 5% ($\alpha = 0,05$)

p-valor ≤ α Se rechaza H_0

pipiMorch

Podemos suponer que las determinaciones de glucemia en personas normales por un método A dan medias mayores que las obtenidas por otro método B.

Ejercicio 7

Una muestra aleatoria de tamaño 25 de una variable aleatoria X ~ N(μ; σ) proporcionó una media $\overline{X}$= 360,32 y una varianza S^2 = 625. Si se plantean las hipótesis:

$$H_0: \mu = 350 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu > 350$$

Determinar cómo debe elegirse el nivel de significación del test para rechazar H_0.

Como ya tenemos el test de hipótesis planteado, procedemos a calcular el estadístico de prueba:

$$T_m = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$\bar{x} = 360,32 \Rightarrow T_m = \frac{360{,}32 - 350}{\frac{25}{\sqrt{25}}} = \frac{10{,}32}{5} = 2{,}064$$

Debemos calcular el p-valor: $p = P(t_{n-1} \geq T_m)$

$p = P(t_{24} \geq 2,064)$ = 0,025

	α(una cola)											
n	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005	0,00025	0,0001	n
21	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819	4,110	4,493	21
22	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792	4,077	4,452	22
23	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,768	4,047	4,415	23
24	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745	4,021	4,382	24
25	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725	3,996	4,352	25

Para que se rechace la hipótesis nula p-valor debe ser $\leq \alpha$, por lo tanto, el nivel de significación debe ser $\alpha \geq 0,025$

Ejercicio 8

Dos métodos para envasar un jarabe dan aproximadamente el mismo peso medio envasado.
El método 2 es algo más rápido que el método 1. A una compañía le gustaría usar el método 2, a menos que pueda demostrarse, con un nivel del 5%, que su varianza es mayor que la del método 1.
Se examinó una muestra de 61 envases de los producidos por cada método. Las desviaciones estándar obtenidas fueron 15 mg para el método 1 y 18 mg para el método 2.
¿Qué método decidirá utilizar la compañía?

Las variables aleatorias son:

X_1: método 1 para envasar jarabe
X_2: método 2 para envasar jarabe

pipiMorch

Lo que se pide es demostrar que las varianzas son diferentes, siendo la del método 2 mayor a la del método 1. Por lo tanto, planteamos *(similar al test de homocedasticidad)*:

$$H_0: \sigma_1 \geq \sigma_2 \qquad H_1: \sigma_1 < \sigma_2$$

Calculamos el estadístico de prueba:

$$F_m = \frac{S^2_{Mayor}}{S^2_{Menor}} \sim F_{n\,Mayor - 1\,;\ \ m\,Menor - 1} \quad si\ vale\ H_0$$

$$F_m = \frac{324}{225} = 1,44$$

Si consideramos un $\alpha = 0,20$

$$F_{60,\,60;\,\frac{0,20}{2}} = 1,40$$

	α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60
29	**0,10**	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,86	1,83	1,78	1,73	1,68	1,65	1,62	1,58	1,55
29	**0,05**	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75
29	**0,01**	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23
30	**0,10**	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,77	1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,54
30	**0,05**	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74
30	**0,01**	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21
40	**0,10**	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,71	1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,47
40	**0,05**	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64
40	**0,01**	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02
60	**0,10**	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,66	1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,40
60	**0,05**	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53
60	**0,01**	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84

Se rechaza la homogeneidad de varianzas con un nivel $\alpha = 0,05$ si:

$$Z.R. = \left\{F_m \in R : F_m \geq F_{n\,Mayor-1,\, n\,menor-1;\, \alpha/2}\right\}$$

Entonces, siendo 1,44 < 1,53 no se rechaza H_0

Como no se rechaza la hipótesis nula, la compañía utilizará el método 2 (ya que, a la compañía le gustaría usar el método 2, ***a menos que pueda demostrarse***, con un nivel del 5%, que su varianza es mayor que la del método 1).

Ejercicio 10

Un grupo de investigadores supone que una droga disminuye el nivel de un ácido en la sangre. Llevaron a cabo una prueba piloto midiendo la concentración de ácido en mg/100ml a 5 personas tomadas como control y a 6 personas que recibieron la droga. Obtuvieron los siguientes resultados:

Grupo	$\overline{X}$	s
Control	2,10	0,17
Recibieron la droga	1,94	0,15

Los investigadores continuarán los estudios sobre esa droga sólo si la probabilidad de equivocarse al afirmar que disminuye el nivel de ácido es a lo sumo del 10%.

a) Efectuar un test para decidir sobre la suposición acerca de las varianzas.

b) ¿Qué decisión tomarán los investigadores; continuarán o no con los estudios?

Planteamos las variables aleatorias:

X_1: nivel de un ácido en la sangre (mg/100ml) personas tomadas como control
X_2: nivel de un ácido en la sangre (mg/100ml) personas que recibieron la droga

suponemos X_1 y X_2 son independientes → $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$

Suponemos que siguen una distribución t de Student $(n + m - 2)$ grados de libertad

Planteamos el test de Student para diferencias de medias *(Test Unilateral derecho)*

LOS DESVÍOS SON DESCONOCIDOS

$$H_1: \underbrace{\boxed{\mu_1}}_{\text{control}} > \underbrace{\boxed{\mu_2}}_{\text{tratados}}$$

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$$

a) Realizamos el Test de Homocedasticidad (si las varianzas son o no homogéneas):

Para verificar este supuesto se pone a prueba:

$$H_0: \sigma_1 = \sigma_2 \qquad\qquad H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$$

Calculamos el estadístico de prueba:

$$F_m = \frac{S^2_{Mayor}}{S^2_{Menor}} \sim F_{n\,Mayor - 1\,;\ m\,Menor - 1} \quad si\ vale\ H_0$$

$$F_m = \frac{0{,}0289}{0{,}0225} = 1,284$$

Si consideramos un $\alpha = 0,20$

$$F_{4,5;\frac{0,20}{2}} = 4,05$$

pipiMorch

	α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,10	39,86	49,50	53,59	55,83	5[illegible],24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19
1	0,05	161,45	199,50	215,71	224,58	23[illegible],16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88
1	0,01	4052,18	4999,50	5403,35	5624,58	576[illegible],65	5858,99	5928,36	5981,07	6022,47	6055,85
2	0,10	8,53	9,00	9,16	9,24	[illegible],29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39
2	0,05	18,51	19,00	19,16	19,25	1[illegible],30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40
2	0,01	98,50	99,00	99,17	99,25	9[illegible],30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40
3	0,10	5,54	5,46	5,39	5,34	[illegible],31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23
3	0,05	10,13	9,55	9,28	9,12	[illegible],01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
3	0,01	34,12	30,82	29,46	28,71	2[illegible],24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23
4	0,10	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92
4	0,05	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
4	0,01	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55

Se rechaza la homogeneidad de varianzas con un nivel $\alpha = 0.20$ si:

$Z.R. = \left\{F_m \in R : F_m \geq F_{n\,Mayor-1,\, n\,menor-1;\, \alpha/2}\right\}$

Entonces, siendo 1,284 < 4,05 no se rechaza H_0

Podemos suponer que ambas variables ***son homogéneas*** $\sigma_1 \approx \sigma_2$

b) Una vez comprobada la homogeneidad , podemos seguir con el respectivo test

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{Sp\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2} \quad si\ vale\ H_0$$

$$Sp^2 = \frac{(n-1)\cdot S^2_{x1} + (m-1)\cdot S^2_{x2}}{n+m-2} = \frac{(5-1)\cdot 0{,}0289 + (6-1)\cdot 0{,}0225}{5+6-2} = \frac{0{,}2281}{9} = 0{,}025$$ ***aplicamos*** $\sqrt{Sp^2}$

Planteamos el estadístico de prueba:

$$T_m = \frac{2{,}10 - 1{,}94}{0{,}159\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}} = \frac{0{,}16}{0{,}096} = \mathbf{1{,}667}$$

Calculamos el p-valor: $p = P(t_s \geq T_m)$ ***siendo s = n + m - 2***

$p = P(t_9 \geq 1,667) \Rightarrow 0,05 < p - valor < 0,1$

	α(una cola)											
n	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005	0,00025	0,0001	n
6	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959	6,788	8,025	6
7	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408	6,082	7,063	7
8	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041	5,617	6,442	8
9	0,883	1,38[illegible]	1,667 [illegible]33	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781	5,291	6,010	9
10	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587	5,049	5,694	10

p-valor ≤ α se rechaza H_0

Sabiendo que los investigadores continuarán los estudios, ***sólo si*** la probabilidad de equivocarse al afirmar que disminuye el nivel de ácido es a lo sumo del 10%: se concluye que los investigadores continuarán con la investigación.

pipiMorch

Ejercicio 11

De una máquina que produce pastillas, se tomó una muestra de 21 unidades y se obtuvo un diámetro medio de 11 mm con una varianza de 0,60 mm^2. Una muestra de 25 pastillas fabricadas por otra máquina dio un diámetro medio de 11,4 mm y una varianza de 0,40 mm^2. Determinar al nivel del 10%:

a) Si hay diferencia entre la variabilidad de los diámetros obtenidos con ambas máquinas.

b) Si la segunda máquina produce pastillas de diámetro medio mayor que la primera.

Planteamos la variables aleatorias:

X_1: diámetro medio de pastillas en máquina A
X_2: diámetro medio de pastillas en máquina B

suponemos X_1 *y* X_2 *son independientes* $\rightarrow X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1),\ X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$

Suponemos que siguen una distribución t de Student $(n + m - 2)$ grados de libertad

a) Testeamos la homogeneidad de varianzas:

$$H_0: \sigma_1 = \sigma_2$$

$$H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$$

$$F_m = \frac{S^2_{Mayor}}{S^2_{menor}} \sim F_{n\,Mayor - 1\,;\, m\,menor - 1} \quad si\ vale\ H_0$$

$$F_m = \frac{0{,}60}{0{,}40} = 1,5$$

Si consideramos un $\alpha = 0.20$ entonces:

$$F_{20,\,24;\,\frac{0.20}{2}} = 1{,}77$$

Siendo la zona de rechazo:

$$Z.R. = \left\{ F_m \in R : F_m \geq F_{n\,Mayor - 1\,;\, m\,menor - 1;\, \alpha/2} \right\}$$

No se rechaza H_0, por lo tanto, no hay diferencia entre la variabilidad de los diámetros obtenidos con ambas máquinas.

b) Planteamos el test de Student para diferencias de medias *(Test Unilateral izquierdo)*

LOS DESVÍOS SON DESCONOCIDOS

$$H_1: \boxed{\mu_1} < \boxed{\mu_2}$$

Máquina A　　Máquina B

$$H_0: \mu_1 \geq \mu_2$$

pipiMorch

Planteamos al estadístico de prueba:

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{Sp\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2} \ si\ vale\ H_0$$

$$Sp^2 = \frac{(n-1)\cdot S_{x1}^2 + (m-1)\cdot S_{x2}^2}{n+m-2} = \frac{(21-1)\cdot 0{,}60 + (25-1)\cdot 0{,}40}{21+25-2} = \frac{21{,}6}{44} = 0{,}491$$ ***aplicamos √Sp²***

$$T_m = \frac{11 - 11{,}4}{0{,}70\sqrt{\frac{1}{21} + \frac{1}{25}}} = \frac{-0{,}4}{0{,}207} = \mathbf{-1{,}93}$$

Calculamos el p-valor: $p = P(t_s \leq -T_m)$ ***siendo s = n + m - 2***

$p = P(t_{44} \geq -1,93) \Rightarrow 0,025 < p - valor < 0,05$

Sabiendo que el nivel de significación es del 10%:

p-valor < α se rechaza H_0

Por lo tanto, la segunda máquina (B) produce pastillas de diámetro medio significativamente mayor que la primera (A).