UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 1er. parcial - 18/09/24 - Tema 9

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)
  Considerá los vectores $\vec{a} = (k, -k, k)$ y $\vec{b} = (0, 0, -k)$ con $k \in \mathbb{R}$ y α es el ángulo determinado por dichos vectores. Elegí la única opción que muestra el valor de $\cos(\alpha)$.

  A) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ D) $-\dfrac{1}{3}$

  Opción correcta: A)
  Resolución
  El cálculo del producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos(\alpha)$ permitirá resolver la ecuación: $-k^2 = \sqrt{3}k \cdot k \cdot \cos(\alpha)$. Así se puede determinar el valor de $\cos(\alpha)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)
  $\vec{v}$ es un vector de $\mathbb{R}^3$ paralelo al versor $\hat{\imath}$, de norma 7 y con una de sus coordenadas negativa. Si $A = \left(\frac{15}{2}, \frac{17}{4}, -\frac{1}{10}\right)$ es el punto medio entre los extremos de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$, elegí la opción que indica las coordenadas de $\vec{u}$.

  A) $\left(-\dfrac{15}{2}, -\dfrac{17}{4}, \dfrac{1}{10}\right)$ C) $\left(4, \dfrac{17}{2}, -\dfrac{1}{5}\right)$

  B) $\left(22, \dfrac{17}{2}, -\dfrac{1}{5}\right)$ D) $\left(-22, -\dfrac{17}{2}, \dfrac{1}{5}\right)$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  Si $\vec{v}$ es paralelo al versor $\hat{\imath}$ es de la forma $\vec{v} = (m, 0, 0)$. Como su norma es 7 y tiene una coordenada negativa, luego $\vec{v} = (-7, 0, 0)$. Como $A = \left(\frac{15}{2}, \frac{17}{4}, -\frac{1}{10}\right)$ es el punto medio entre los extremos de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$, puede plantearse la igualdad: $\left(\frac{-7+u_x}{2}, \frac{0+u_y}{2}, \frac{0+u_z}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{17}{4}, -\frac{1}{10}\right)$. Igualando coordenada a coordenada, se puede obtener la respuesta al problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)
  Elegí la opción que indica cuánto mide la distancia entre el punto $A = (2, 1, 1)$ y la recta $r = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(-2, 1, 2) + (2, -1, -1), t \in \mathbb{R}\}$.

  A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

  Opción correcta: C)
  Resolución
  Para calcular la distancia pedida se puede escribir la ecuación de plano que contiene al punto A y es normal a la recta r, luego encontrar el punto de intersección entre la recta y el plano -en este caso es $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$- y, por último, calcular la distancia entre ese punto y A. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
  Considerá las ecuaciones de los planos $\pi_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = s(1, 1, 0) + t(2, 0, 2) + (1, 1, 1); s, t \in \mathbb{R}\}$ y $\pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 1 + y\}$. Elegí la opción que indica la posición relativa de los planos.

  A) Son perpendiculares.
  B) La intersección es una recta y no son perpendiculares.
  C) Son paralelos.
  D) Son coincidentes.

Opción correcta: B)
Resolución
Los puntos del plano π_1 pueden escribirse como $(s+2t+1, s+1, 2t+1), s, t \in \mathbb{R}$. Al reemplazarlo en la ecuación de π_2 -en busca de la intersección- se obtiene $t = 0$. Para ese valor obtenido, si se lo reemplaza en la ecuación de π_1 se obtiene la ecuación de una recta. De esta forma puede descartarse que sean paralelos o coincidentes. Basta probar que el producto escalar entre el vector normal a π_2 y el vector normal a π_1 -puede obtenerse con el producto vectorial entre sus vectores directores- no es nulo. Luego, los planos no son perpendiculares y tienen como intersección una recta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
Considerá el conjunto $A = \{(0, -2, -1), (k, 1, 0), (-8, 0, k+3)\}$. Elegí la opción que muestra los valores que puede tomar k si se quiere que A sea un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^3$.

A) $k \in \{1, -4\}$
B) $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$
C) $k \in \mathbb{R} \setminus \{1, -4\}$
D) $k \in \emptyset$

Opción correcta: C)
Resolución
Resulta más cómodo ver cuando $A = \{(0, -2, -1), (k, 1, 0), (-8, 0, k+3)\}$ no es un generador de $\mathbb{R}^3$ y descartar esos valores. Para que no sea generador debe ocurrir que los vectores deben ser L.D. con lo cual el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ k & 1 & 0 \\ -8 & 0 & k+3 \end{pmatrix}$ debe ser cero. De esto obtenemos que $k^2+3k-4 = 0$ de donde salen los valores de k para los cuales el conjunto no es una base. Entonces los valores para los cuales el conjunto es generador de $\mathbb{R}^3$ son $\mathbb{R} \setminus \{1, -4\}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
Considerá el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + nx_3 = 0\}$. Elegí la opción de valores n y m para los cuales el conjunto $A = \{(0, 1, 0), (m, 0, 1)\}$ resulta una base de S sabiendo que el punto $(-\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{6})$ pertenece a S.

A) $n = 3$ y $m = 3$
B) $n = -3$ y $m = 3$
C) $n = -3$ y $m = -3$
D) $n = 3$ y $m = -3$

Opción correcta: D)
Resolución
Reemplazando $(m, 0, 1)$ en $x_1 + nx_3 = 0$ obtenemos $m = -n$ mientras que al reemplazar $(-\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{6})$ tenemos $-\frac{5}{2} + \frac{5}{6}n = 0$ con lo cual $n = 3$ y por lo tanto $m = -3$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)
Indicá la opción que muestra la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $(-12; 0)$ y $(12; 0)$ y cuya distancia entre sus vértices es 12.

A) $\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{108} = 1$
B) $\dfrac{y^2}{108} - \dfrac{x^2}{36} = 1$
C) $\dfrac{x^2}{108} - \dfrac{y^2}{36} = 1$
D) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{108} = 1$

Opción correcta: D)
Resolución
Como la distancia entre los vértices es 12, entonces la distancia entre el centro y cada vértice es 6. También podemos deducir que la distancia entre los focos es 24, entonces $c = 12$ y usando que $c^2 = a^2 + b^2$ averiguamos que $b^2 = 108$. Con estos datos obtenidos es posible escribir la ecuación de la hipérbola: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{108} = 1$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)
 Elegí entre las opciones, aquella que muestra el valor exacto de la excentricidad y las coordenadas del centro de la cónica $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 - y^2 - 6x - 30y - 546 = 0\}$

 A) $e = \dfrac{1}{2}$; $(1, -15)$
 B) $e = \dfrac{1}{2}$; $(-15, 1)$
 C) $e = 2$; $(1, -15)$
 D) $e = 2$; $(-1, 15)$

 Opción correcta: C)
 Resolución
 Tras completar cuadrados en la ecuación dada, se puede construir la ecuación canónica de la cónica: $\frac{(x-1)^2}{108} - \frac{(y+15)^2}{324} = 1$. Desde aquí se puede leer y deducir que se trata de una hipérbola de centro $(1; -15)$ con eje focal paralelo al eje y y como $c^2 = 108 + 324$ se deduce que $c = \sqrt{432}$. Finalmente, la excentricidad será $\frac{\sqrt{432}}{\sqrt{108}} = 2$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.
