[redacted] **ÁLGEBRA (FCE) (71)** (Cátedra: GACHE )
**1° PARCIAL**

.UBA XXI

**TEMA 6**

30/09/22

| **PUNTAJE** | **1) 2 puntos** | **2) a) 1 punto b) 1 punto** | **3) 2,5 puntos** | **4 al 10) 0,5 cada uno** |
|---|---|---|---|---|

***1) Hallar las matrices*** $X=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$ ***tales que se verifique que*** $X^2=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

***Dada*** $X=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$ ***debemos hallar las matrices que verifican la siguiente condición*** $X^2=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

***Primero debemos hallar la matriz*** $X^2$

$$X^2 = X\,.\,X=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ a+b & b^2 & 0 \\ 1 & b+c & c^2 \end{pmatrix}$$

***Sabemos que***

$$X^2=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ a+b & b^2 & 0 \\ 1 & b+c & c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\to\begin{cases} a^2=4\to\boxed{a=\pm 2} \\ a+b=0\to\boxed{b=-a} \\ b^2=4\to\boxed{b=\pm 2} \\ c^2=4\to\boxed{c=\pm 2} \\ b+c=0\to\boxed{c=-b} \end{cases}$$

***Tenemos entonces dos posibles matrices*** $X$***, que verifican lo pedido***

***Si*** $\boxed{a=2\to b=-2\to c=2}\to X=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

***Si*** $\boxed{a=-2\to b=2\to c=-2}\to X=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

*2)*

*a)* *Se considera la recta r que pasa el punto* $P_0=(1;-1;3)$ *y tiene vector director* $\vec{v}=(-2;3;-1)$ *y la recta*

$$s:\frac{x+1}{-4}=\frac{y-3}{a}=\frac{z-1}{-2}$$

*¿Existe algún valor de a para que las rectas sean paralela?*

*Conocida la recta* $r$ *que pasa el punto* $P_0=(1;-1;3)$ *y tiene vector director* $\boxed{\overrightarrow{v_r}=(-2;3;-1)}$

*y la recta* $s:\frac{x+1}{-4}=\frac{y-3}{a}=\frac{z-1}{-2}\rightarrow\boxed{\overrightarrow{v_s}=(-4;a;-2)}$

*Para que las rectas sean paralelas sus vectores directores deben ser proporcionales,*

*es deicr se debe cumplir que :*

$$\boxed{\overrightarrow{v_s}=k\overrightarrow{v_r}}\quad o\quad \boxed{\frac{v_{rx}}{v_{sx}}=\frac{v_{ry}}{v_{sy}}=\frac{v_{rz}}{v_{sz}}=k}\rightarrow\frac{-2}{-4}=\frac{3}{a}=\frac{-1}{-2}\rightarrow\frac{3}{a}=\frac{1}{2}\rightarrow si\ \boxed{a=6}\rightarrow\overrightarrow{v_r}\parallel\overrightarrow{v_s}\rightarrow\boxed{r\parallel s}$$

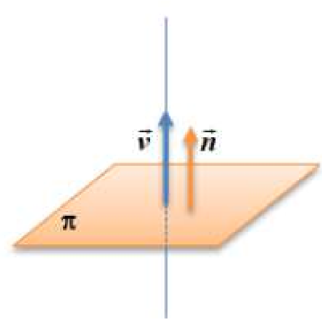
**Recomendación: Puedes rever la tutoría el tema condición de paralelismo entre rectas de la Unidad 1**

*b)* *Hallar la ecuación del plano* $\pi$ *perpendicular a la recta r que pasa por el punto* $P_1=(2;-3;5)$

*Para hallar la ecuación del plano necesitamos conocer un punto del plano y su vector normal, el dato dado es que el plano es perpendicular a la recta, entonces el vector normal del plano* $\pi_4$ *coincide con el vector director de la recta*

*Datos para hallar el plano*

$$\pi:\begin{cases}P_1=(2;-3;5)\\ \vec{n}=(-2;3;-1)\end{cases}$$




$\boxed{\pi=\overrightarrow{P_1P}\cdot\vec{n}=0}$ *Ecuación del plano*

*Calculamos el vector* $\overrightarrow{P_1P}$

$$\overrightarrow{P_1P}=(x;y;z)-(2;-3;5)=(x-2;y+3;z-5)$$

$$\overrightarrow{P_1P}\cdot\vec{n}=0\rightarrow(x-2;y+3;z-5)\cdot(-2;3;-1)=0$$

$$\pi:(-2)(x-2)+3(y+3)+(-1).(z-5)=0$$

$$\pi:-2x+4+3y+9-z+5=0\rightarrow\boxed{\pi:-2x+3y-z+18=0}$$

**Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 1 para revisar el tema plano y recta perpendiculares**

*3) Dadas las matrices*

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & -2\\ k & -2 & 1\\ -2 & 1 & k\end{pmatrix} \; y \;\; B=\begin{pmatrix}6\\0\\-6\end{pmatrix}$$

***Determinar los valores*** $k\in\Re$ ***, para que el sistema*** $A.X=B$ ***admita solución única, infinitas soluciones y no admita solución.***

***Dado el sistema de ecuaciones***

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & -2\\ k & -2 & 1\\ -2 & 1 & k\end{pmatrix}\rightarrow |A|=\begin{vmatrix} k & 1 & -2\\ k & -2 & 1\\ -2 & 1 & k\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & k\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}k & 1\\ -2 & k\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}k & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=k\left(-2k-1\right)-\left(k^2+2\right)-2\left(k-4\right)=$$

$$-2k^2-k-k^2-2-2k+8=-3k^2-3k+6$$

$$-3k^2-3k+6=0\rightarrow k^2+k-2=0\rightarrow \boxed{k=1\vee k=-2}$$

***A partir de estos valores se analiza el sistema reemplazando en la matriz ampliada por cada uno de ellos.***

1) ***Si*** $k\neq -2\wedge k\neq 1\rightarrow SCD$

2) ***Evaluamos el sistema en*** $k=1$ ***, en este caso la matriz ampliada del sistema es:***

$$\begin{pmatrix} k & 1 & -2\\ k & -2 & 1\\ -2 & 1 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\-6\end{pmatrix}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1} & 1 & -2 & 6\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 1 & -6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1} & 1 & -2 & 6\\ 0 & -3 & 3 & -6\\ 0 & 3 & -3 & 6\end{array}\right)\frac{1}{3}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 6\\ 0 & -1 & \boxed{1} & -2\\ 0 & 3 & -3 & 6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & \boxed{1} & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\rightarrow r\left(A\right)=r\left(A'\right)=2<3\therefore SCI$$

3) ***Evaluamos el sistema en*** $k=-2$***, en este caso la matriz ampliada del sistema es:***

$$\begin{pmatrix} k & 1 & -2\\ k & -2 & 1\\ -2 & 1 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\-6\end{pmatrix}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & \boxed{1} & -2 & 6\\ -2 & -2 & 1 & 0\\ -2 & 1 & -2 & -6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & \boxed{1} & -2 & 6\\ -6 & 0 & -5 & 12\\ 0 & 0 & 0 & -12\end{array}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & -2 & 6\\ \boxed{1} & 0 & \frac{5}{6} & -2\\ 0 & 0 & 0 & -12\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & -\frac{1}{3} & 2\\ \boxed{1} & 0 & \frac{5}{6} & -2\\ 0 & 0 & 0 & -12\end{array}\right)\rightarrow r\left(A\right)\neq r\left(A'\right)\therefore SI$$

$$\boxed{\begin{array}{l}SCD:\Re-\left\{1,-2\right\}\\ SCI:k=1\\ SI:\;\; k=-2\end{array}}$$

***Recomendación: Puedes rever las tutorías en línea 27 y 29 para revisar el tema análisis de un sistema de ecuaciones en función de un parámetro***

4) *Siendo las matrices* $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ *y* $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ *la matriz X que satisface que* $XA+B=C$ *es:*

- ☐ *a)* $X=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ -6 & 2\end{pmatrix}$
- ☐ *b)* $X=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$
- ☐ *c)* $X=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -4 & 2\end{pmatrix}$
- ☐ *d)* $X=\begin{pmatrix}10 & 8\\ -7 & -5\end{pmatrix}$

***Recomendación: Puedes rever las tutorías en línea 18 y 19 para revisar el tema ecuaciones matriciales***

5) *Para qué conjunto de valores del parámetro* $k\in\Re$, *el rango de la matriz sea menor a 3, siendo* $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ k & 0 & k\\ -2 & k & 0\end{pmatrix}$

- ☐ *a)* $\{0,2\}$
- ☐ *b)* $\forall k\in\Re$
- ☐ *c)* $\nexists k\in\Re$
- ☐ *d)* $\forall k\in\Re-\{0,2\}$

***Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 15 para revisar el tema rango de una matriz***

6)

*Sabiendo que* $|T|=\begin{vmatrix}r & s & t\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=7$, *entonces el determinante* $|U|=\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ r+2 & s+2 & t+2\\ 4 & 4 & 4\end{vmatrix}$ *es:*

- ☐ *a)* $|U|=-7$
- ☐ *b)* $|U|=-14$
- ☐ *c)* $|U|=7$
- ☐ *d)* $|U|=14$

***Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 13 para revisar el tema cálculo de determinantes***

7) *El conjunto de valores de* $m\in\Re$ *tales que la matriz A no admita inversa siendo* $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & m\\ m & 0 & -1\\ 6 & -1 & 0\end{pmatrix}$ *es:*

- ☐ *a)* $\Re$
- ☐ *b) sólo si* $m=1$
- ☐ *c)* $\varnothing$
- ☐ *d) sólo si* $m=0$

***Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 21 para revisar el tema matriz inversa.***

8) *El o los valores de* $x\in\Re$ *que verifican la ecuación* $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ x+2 & 1 & -1\\ 3 & x+2 & 1\end{vmatrix}=0$ *son:*

- ☐ *a)* $x=0 \vee x=-4$
- ☐ *b)* $\forall x\in\Re$
- ☐ *c)* $x=-2$
- ☐ *d)* $\nexists x\in\Re$

***Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 13 para revisar el tema cálculo de determinantes***

*9) Sea el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$ *entonces el conjunto solución del sistema es:*

- ☐ *a)* $\{(-1;2;1)\}$
- ☐ *b)* $\{(0;0;0)\}$
- ☐ *c)* $\{(-1+3z;2-5z;z), z \in \Re\}$
- ☐ *d)* $\{(3z;-5z;z), z \in \Re\}$

***Recomendación: Puedes rever las tutorías en línea 25 y 26 para revisar el tema resolución de sistemas de ecuaciones lineales compatibles indeterminados***

*10) En una economía hipotética de dos industrias A y B la matriz de los coeficientes tecnológicos es* $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.

*Si el vector demanda final es* $DF = \begin{pmatrix} 153 \\ 238 \end{pmatrix}$ *, entonces el vector producción es:*

- ☐ *a)* $X = \begin{pmatrix} 520 \\ 464 \end{pmatrix}$
- ☐ *b)* $X = \begin{pmatrix} 464 \\ 520 \end{pmatrix}$
- ☐ *c)* $X = \begin{pmatrix} 127{,}5 \\ 117{,}94 \end{pmatrix}$
- ☐ *d) Ninguna de las anteriores*

***Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 16 para revisar el tema Matriz de Insumo Producto***