UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 1er. parcial - 18/09/24 - Tema 4

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Elegí la opción que muestra el valor de $k \in \mathbb{Z}_{<0}$ para que el conjunto $\{(1,0,2),(0,-2,-k),(\frac{1}{2},-k-1,0)\}$ no sea una base de $\mathbb{R}^3$.

A) 2 B) 1 C) -2 D) -1

Opción correcta: C)

Resolución

Como el conjunto no debe ser una base entonces los vectores deben ser L.D. con lo cual el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -k \\ \frac{1}{2} & -k-1 & 0 \end{pmatrix}$ debe ser cero. De esto obtenemos que $-k^2-k+2=0$ que tiene por soluciones $k=1$ y $k=-2$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá el subespacio $S=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : 6x_1+nx_2=0 \wedge 2x_2+x_3+mx_4=0\}$. Elegí la opción que muestra los valores de n y m que hacen que el subespacio tenga como base al conjunto $\{(1,2,0,1),(0,0,-3,1)\}$.

A) $n=-3$ y $m=-3$

B) $n=3$ y $m=-3$

C) $n=-3$ y $m=3$

D) $n=3$ y $m=3$

Opción correcta: C

Resolución

La única forma de reemplazo que nos da información es reemplazar las componentes de $(1,2,0,1)$ en $6x_1+nx_2=0$ y las componentes de $(0,0,-3,1)$ en $2x_2+x_3+mx_4=0$, a partir de esto obtenemos el sistema: $\begin{cases} -3+m=0 \\ 6+2n=0 \end{cases}$ de donde obtenemos que $m=3$ y $n=-3$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Indicá el valor que debe tomar $k\in\mathbb{R}$ para que $144x^2-24kx+16y^2=63$ corresponda a la ecuación de una elipse con centro $(-0,75;0)$.

A) 9 B) -18 C) -9 D) $0,5$

Opción correcta:C)

Resolución

A partir del método de completar cuadrados, se puede reescribir la ecuación dada como: $\left(x-\frac{k}{12}\right)^2+\frac{y^2}{9}=\frac{7}{16}+\frac{k^2}{144}$. Desde esta expresión, se puede leer que el centro de la elipse es $(-0,75;0)$ únicamente para $k=-9$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

La hipérbola H tiene excentricidad es $1,8$ y sus focos son $F_1=(0,-8)$ y $F_2=(0,10)$. Indicá cuál resulta la única afirmación verdadera acerca de H.

A) $(0,4)$ es uno de los vértices de H.

B) $(\sqrt{168},11)\notin H$.

C) $(0,2)$ es el centro de H.

D) $(\sqrt{168},-9)\in H$.

Opción correcta: D)
Resolución
A partir de conocer los focos de H es posible obtener su centro, pues resulta el punto medio entre ellos, $(0,1)$. Usando que la excentricidad de H se calcula como el cociente entre la mitad de la distancia entre los focos, y la mitad de la distancia entre los vértices, podemos deducir que este último valor será 5. En consecuencia, los vértices de H son $(0,6)$ y $(0,-4)$. Luego, la primera y tercera afirmación resultan falsas. Además, usando la relación $c^2 = a^2+b^2$, deducimos el tercer dato que nos falta para construir la ecuación canónica de H, nos queda: $\frac{(y-1)^2}{25} - \frac{x^2}{56} = 1$. Reemplazando las coordenadas de cada punto que se mencionan en las opciones B) y D) verificamos que los dos puntos pertenecen a H, luego la única afirmación correcta es la D). Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
  Elegí la opción que muestra las coordenadas de un vector $\vec{w}$ de norma $6\sqrt{5}$ que es paralelo al vector $\vec{v} = \left(-\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{5}{9}\right)$.

  A) $(4,8,10)$

  B) $\left(\frac{-12\sqrt{5}}{9}, \frac{24\sqrt{5}}{9}, -\frac{30\sqrt{5}}{9}\right)$

  C) $\left(\frac{12\sqrt{5}}{9}, -\frac{24\sqrt{5}}{9}, \frac{30\sqrt{5}}{9}\right)$

  D) $(4,-8,10)$

  Opción correcta: D)
  Resolución
  $\vec{w} = k \cdot \left(-\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{5}{9}\right)$, con $k \neq 0$ es un vector paralelo a $\vec{v}$. Dado que $||\vec{w}|| = 6\sqrt{5}$ entonces se debe plantear la ecuación: $\sqrt{\left(-\frac{2k}{9}\right)^2 + \left(\frac{4k}{9}\right)^2 + \left(-\frac{5k}{9}\right)^2} = 6\sqrt{5}$. Esta ecuación tiene dos soluciones y para una de esas soluciones se obtiene la respuesta correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
  Considerá los vectores de $\mathbb{R}^3$ $\vec{v}$ y $\vec{w}$. $\vec{v}$ un vector de norma $\sqrt{5}$, $\vec{w}$ un vector de norma 8 y $\frac{2\pi}{3}$ es el ángulo determinado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Elegí la única opción que muestra el resultado del producto escalar entre dichos vectores.

  A) -4 B) $-4\sqrt{5}$ C) $-2\sqrt{2}$ D) $-0{,}5\sqrt{5}$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  El producto escalar entre dos vectores se calcula mediante la fórmula $\vec{v} \cdot \vec{w} = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot \cos(\alpha)$. Reemplazar los datos del enunciado en esta expresión permite obtener la respuesta correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)
  Elegí la opción que indica el valor que corresponde a la distancia del punto $A = (-3,-2,1)$ al plano de ecuación $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 : -x+y+2z+1 = 0\}$.

  A) $2\sqrt{6}$ B) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ C) $\dfrac{2}{3\sqrt{6}}$ D) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  Para calcular la distancia de un punto A a un plano Π los pasos a seguir son: escribir la ecuación de la recta r normal al plano Π que contiene al punto A, calcular el punto B como intersección entre la recta r y el plano Π y, por último, calcular la distancia entre los puntos A y B. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)
  Considerá el plano de ecuación $-x+y-z=7$ y la recta de ecuación $(x;y;z)=\alpha\cdot(-2,-4,-6)+(-12,-3,-22)$. Elegí la única afirmación verdadera.

  A) La recta y el plano se cortan en un único punto.

  B) La recta y el plano son ortogonales.

  C) La recta y el plano son paralelos.

  D) La recta está contenida en el plano.

  Opción correcta: A)
  Resolución
  Todo punto de la recta puede escribirse como $(-2\alpha-12,-4\alpha-3,-6\alpha-22)$ siendo $\alpha\in\mathbb{R}$. Si se reemplaza este punto en la ecuación del plano, se obtiene un único valor de α de manera tal que la recta y el plano se intersecan en un único punto: $(0,21,14)$. Además, puede probarse que no son ortogonales la recta y el plano porque sus vectores directores no son paralelos. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.