UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 12/06/2024 - Tema 12

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considerá los complejos: $z_1 = 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ y $z_2 = 3 \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$. Elegí la opción que muestra el cociente entre $Im[(z_1)^5]$ y $Im[\overline{z_2}]$.

A) -16 B) $-3\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $-16\sqrt{3}$ D) $-\frac{16}{3}\sqrt{2}$

Opción correcta: D)
Resolución: para resolver este ejercicio, primero hay que expresar en forma binómica cada uno de los complejos y, luego, realizar el cociente en las partes imaginarias.
$z_1 = 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$
Luego: $(z_1)^5 = 2^5\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -16\sqrt{3} + 16i$
$z_2 = 3 \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ Luego: $\overline{z_2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$
El último cálculo a realizar es $\frac{Im[(z_1)^5]}{Im[\overline{z_2}]} = 16 : \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$. El resultado de este cociente es la respuesta al problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Elegí la opción que contiene una solución $z \in \mathbb{C}$ de la ecuación $z^3 = (1+i)(5+7i)^3$.

A) $(5+7i)\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right)\right)$
B) $(5-7i)\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{17}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{17}{12}\pi\right)\right)$
C) $(5-7i)\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{9}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{9}{12}\pi\right)\right)$
D) $(5+7i)\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{9}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{9}{12}\pi\right)\right)$

Opción correcta: D)
Resolución: la ecuación $z^3 = (1+i)(5+7i)^3$ puede ser escrita como $\left(\frac{z}{5+7i}\right)^3 = 1+i$. Es decir que $\frac{z}{5+7i}$ es una raíz cúbica de 1+i. Esas raíces cúbicas tienen como módulo $\sqrt[6]{2}$ y argumentos $\frac{\pi}{12}$, $\frac{9\pi}{12}$ y $\frac{17\pi}{12}$.Por lo tanto, de las opciones ofrecidas, es solución aquella que tiene el argumento $\frac{17\pi}{12}$ y debe estar multiplicada por el complejo $5+7i$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) = mx^4 - 5x^3 + 8n$, con $n, m \in \mathbb{R}$. Indicá los valores de n y m de modo tal que P tenga resto 5 al dividirlo por el polinomio $(x+1)$ y resto 20 al dividirlo por $(x-2)$.

A) $m = \frac{1}{2}$ y $n = -4$
B) $m = -4$ y $n = -\frac{1}{2}$
C) $m = 4$ y $n = -\frac{1}{2}$
D) $m = -\frac{1}{2}$ y $n = 4$

Opción correcta: C)
Resolución: por el Teorema del Resto, sabemos que el resto de dividir a un polinomio por $(x-a)$ se obtiene evaluando este en a. Entonces, $P(-1) = 5$ y $P(2) = 20$. A partir del planteo de estas ecuaciones es posible deducir que $n = -\frac{1}{2}$ y $m = 4$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá los polinomios y $P(x) = (x^2+81)(x^2-4)$ y $Q(x) = x^4+13x^2+36$. Indicá la opción que contiene una afirmación verdadera acerca de estos polinomios.

A) (x^2+4) divide a P y también divide a Q.
B) $-2i$ es raíz simple de P y raíz de Q.
C) $-2i$ es raíz simple de P y no es raíz de Q.
D) $(x-9i)$ divide a P y no divide a Q.

Opción correcta: D)
Resolución: lo primero que podemos ver es que $P(9i)$ se anula pero $P(-2i)$ no, de este hecho se deduce que $(x-9i)$ divide a P y que $-2i$ no es raíz de este polinomio. Además, realizando la división de P por (x^2+4) notaremos que el resto no es nulo, por lo que (x^2+4) no divide a P, quedándonos la última de las opciones como la única posible. Por su parte, si $(x-9i)$ fuese un divisor de Q debería valer que $Q(9i)$ se anula, pero evaluando se puede comprobar que esto no ocurre. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Considerá las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 5 & \frac{1}{4} \\ -3 & \frac{4}{5} & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 1 & -5 \\ -2 & -11 & -8 & -11 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 4 & -8 & 2 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.
Elegí la única afirmación verdadera.

A) Todas poseen el mismo rango.
B) $rg(A) = rg(B) = 3$.
C) Todas poseen distinto rango.
D) $rg(B) = rg(C) = 2$

Opción correcta: D)
Resolución: la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 5 & \frac{1}{4} \\ -3 & \frac{4}{5} & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & \frac{4}{5} & -6 \\ 0 & 5 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$ posee 3 filas linealmente independientes, por lo que $rg(A) = 3$. La matriz B posee dos columnas iguales, luego de eliminar una de ellas; mediante el procedimiento de triangulación podemos llegar ,por ejemplo, a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ -2 & -11 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ por lo que podemos afirmar que $rg(B) = 2$. En la matriz C una fila es combinación lineal de las otras dos, por ejemplo $F_1 = F_2 - F_3$ Y dado que F_2 y F_3 son linealmente independientes,resulta $rg(C) = 2$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá el sistema lineal $S = \begin{cases} 2x+4y-6z = a \\ -1x+5y-8z = b \\ -6x+2y-4z = c \end{cases}$. Elegí la única opción que muestra las condiciones que deben cumplir $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que el sistema tenga solución.

A) $2a = 2b + c$
B) $2a - 2b + c \neq 0$
C) $2a - b + c = 0$
D) $2a = 2b - c$

Opción correcta: D)
Resolución: este problema se resuelve utilizando el método de triangulación de Gauss. Se puede reescribir el sistema $\begin{cases} 2x+4y-6z = a \\ 7y-11z = \frac{1}{2}a + b \\ 0 = 2a-2b+c \end{cases}$, el cual es compatible para cualquier terna donde $2a - 2b + c = 0$. Esta expresión es equivalente a la propuesta en la opción D). Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 8, 9 y 10.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$; $T(x_1; x_2; x_3; x_4) = (x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4; x_1 - 2x_2 - 2x_4; x_2 - x_4)$. Indicá la única opción que muestra una base para el núcleo de T.

A) $\{(0; 0; 0; 0)\}$

B) $\{(12; 3; 4; 3)\}$

C) $\{(1; 1; 0; -1); (12; 3; 4; 3)\}$

D) $\{(12; -3; 4; 3)\}$

Opción correcta: B)

Resolución: para hallar una base para el $Nu(T)$, podemos plantear: $T(x_1; x_2; x_3; x_4) = (0; 0; 0)$ y resolver el sistema de ecuaciones que de allí surge:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_4 & = 0 \\ x_2 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, podemos llegar a que el conjunto solución es $(4x_4; x_4; \frac{4}{3}x_4; x_4)$ con x_4 libre. Esto nos dice que el subespacio Núcleo de T estará generado por $\left\langle (4; 1; \frac{4}{3}; 1) \right\rangle$, entonces multiplicando por 3 tenemos $(12; 3; 4; 3)$. Luego, la opción correcta será la segunda. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 11 y 12.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá las transformaciones lineales $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donde: $M_{T_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ y, $T_2(x_1; x_2) = (-2x_1 + 3x_2; 4x_1 + 2x_2)$. Indicá entre las opciones, la única afirmación verdadera.

A) T_1 y T_2 tienen la misma expresión matricial.

B) La matriz de $T_2 \circ T_1$ es la matriz identidad.

C) La matriz de $T_1 \circ T_2$ es la matriz nula.

D) La matriz de T_1 es la traspuesta de la matriz de T_2.

Opción correcta: B)

Resolución: lo primero que podemos hacer es hallar la matriz de T_2 a partir del dato que tenemos de su expresión funcional: $M_{T_2} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ Por lo que podemos decir que la primera opción y la cuarta opción son falsas. Además, podemos hallar las composiciones $T_2 \circ T_1$ y $T_1 \circ T_2$, para analizar las otras opciones. Recordemos que para componer transformaciones lineales se puede hallar haciendo el producto de las matrices en el orden que indica la composición:

$M_{T_2 \circ T_1} = T_2 \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Luego la opción B) es correcta. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 11 y 12.
