UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 06/11/24 - Tema 5

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

El vector $(m; n; m; 0)$ con $m, n \in \mathbb{R}$ es solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Elegí la única opción que indica los valores reales de m y de n.

A) $m = -2$, $n = 1$

B) $m = n = 1$

C) $m = 1$, $n = -2$

D) $n = -2m$ con $m \in \mathbb{R}$

Opción correcta: C)

Resolución

Si triangulás el sistema y encontrás que es compatible determinado, igualando coordenada a coordenada la solución obtenida con $(m; n; m; 0)$ te permitirá obtener los valores de m y de n. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá la matriz de 3×3: $M = \begin{pmatrix} -r & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & r^2 & 0 \end{pmatrix}$. Elegí la única opción que indica el/los valores de r para el/los cual/es la matriz es inversible.

A) Para ningún valor real de r

B) $r \neq \sqrt{2}, r \neq -\sqrt{2}$

C) $r \in \mathbb{R}$

D) $r = \sqrt{2}, r = -\sqrt{2}$

Opción correcta: B)

Resolución

El determinante de la matriz M es $2r^2 - 4$. Esta expresión no debe anularse, caso contrario, la matriz no admitirá inversa. Esto sucede para $|r| \neq \sqrt{2}$. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 9 y 10.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Dada la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cuya expresión funcional es $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + ax_2, x_2 + x_1)$, determiná cuál de las siguientes opciones corresponde al valor de a para el cual se tiene $Nu(T) = \langle (1, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$.

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

Opción correcta: B)

Resolución

Como necesitamos que $(x_1 + ax_2, x_2 + x_1) = (0, 0)$ entonces nos queda el sistema $\begin{cases} x_1 + ax_2 = 0 \\ x_2 + x_1 = 0 \end{cases}$ del cual obtenemos $(1 - a)x_1 = 0$, con lo cual el núcleo de T tiene por base a $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ solamente si $a = 1$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
  Considerá las transformaciones del plano T y T' que verifican las siguientes condiciones: ambas son dilataciones, T de factor 2 mientras que T' lo es de factor $k \in \mathbb{R}_{>0}$, y cumplen que el determinante de la matriz asociada a $T' \circ T$ es 64. Indicá cuál es el valor de k para el cual se verifican todas las condiciones mencionadas.

  A) $k = -4$ B) $k = 1$ C) $k = 4$ D) $k = 16$

  Opción correcta: C)
  Resolución
  Las matrices asociadas a T y T' son respectivamente $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Dado que su producto es $T' \circ T = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}$ el determinante es $4k^2$ y debe ser igual a 64. Por lo tanto, el valor correcto es $k = 4$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
  Sea $z = \dfrac{5 + ik}{-9 + i^3}$ siendo $k \in \mathbb{R}$. Indicá la opción que muestra el valor de k para el cual se cumple la ecuación $Im(z) = \frac{1}{40}$.

  A) $\dfrac{59}{180}$ C) $\dfrac{-9 - i}{40}$

  B) $\dfrac{1}{3}$ D) $-\dfrac{1}{5}$

  Opción correcta: A)
  Resolución
  Usando que $i^3 = -i$ y realizando la división que se presenta es posible escribir a z en su forma binómica y desde allí leer que $Im(z) = \frac{5-9k}{82}$. A continuación, podemos plantear la condición del enunciado y despejar el valor de k. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
  Considerá el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : (z + 1)^3 = 1\}$. Indicá la única opción verdadera acerca de A.

  A) A tiene dos elementos con parte real positiva.
  B) El número $z = -1 + i$ pertenece a A.
  C) Los elementos de A se ubican en el primer y cuarto cuadrante.
  D) Los elementos de A no nulos tienen argumento menor a $\frac{5\pi}{3}$.

  Opción correcta: D)
  Resolución
  Lo primero que podemos observar que las raíces cúbicas de la unidad son 1, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Luego nos queda que las tres soluciones de la ecuación son $z = 0$; $z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $z = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Como de las tres soluciones dos tienen parte real no positiva, ya se pueden descartar la primera opción. Al reemplazar $-1 + i$ en la ecuación nos da como resultado $i^2 = -1$ por lo que también la segunda opción también es falsa. Graficando las soluciones se evidencia que la cuarta opción es falsa y la última es verdadera.Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio de grado mínimo tal que $P(\sqrt{7}) = 0$, $-i$ es raíz doble y $P(-1) = 72$. Elegí la única opción que muestra un polinomio P que verifica todas las condiciones enunciadas.

A) $P(x) = x^6 - 5x^4 - 13x^2 - 7$

B) $P(x) = -3x^6 + 15x^4 + 39x^2 + 21$

C) $P(x) = x^4 - 6x^2 - 7$

D) $P(x) = 3x^6 - 15x^4 - 39x^2 - 21$

Opción correcta: B)

Resolución

Con las condiciones pedidas, el polinomio $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ puede ser escrito en forma factorizada como $P(x) = a(x-i)^2(x+i)^2(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$. El dato $P(-1) = 72$ permite calcular el coeficiente principal a y obtener la respuesta del problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá $C(x)$ el polinomio cociente de la división entre $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x + 4$ y $Q(x) = x^2 + 1$. Elegí la única opción que muestra el polinomio $-2 \cdot [C(x)]^2$.

A) $x^2 - 5x + 4$

B) $x^4 - 25x^2 + 16$

C) $-2x^4 + 50x^2 - 32$

D) $-2x^4 + 20x^3 - 66x^2 + 80x - 32$

Opción correcta: D)

Resolución

El polinomio cociente de la división entre P y Q es $x^2 - 5x + 4$. Para obtener la respuesta hay que elevar ese polinomio al cuadrado y, luego, multiplicarlo por -2. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.
