[redacted] **ÁLGEBRA (FCE) (71)** (Cátedra: GACHE)
1° PARCIAL

TEMA 1

30/09/22

PUNTAJE	**1) 2 puntos**	**2) a) 0,5 punto b) 0,5 punto c) 1 punto**	**3) 2,5 puntos**	**4 al 10) 0,5 cada uno**

1) Dadas las matrices es $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ ***y*** $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ ***Hallar la matriz*** $(B.A)^{-1}$ ***justificando su cálculo.***

Para poder hallar la matriz pedida, primero encontramos la matriz B.A teniendo en cuenta que $B\in\Re^{2x3}$ ***y*** $A\in\Re^{3x2}$ ***, entonces*** $B\cdot A\in\Re^{2x2}$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & 8\end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz $B.A$

1) ***Calculamos el determinante para comprobar si la matriz es inversible***
$$|B\cdot A|=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 3 & 8\end{vmatrix}=24-(-6)=30\neq 0\rightarrow\exists(B\cdot A)^{-1}$$

2) ***Hallamos la traspuesta*** $(B\cdot A)^T=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & 8\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}3 & 3\\ -2 & 8\end{pmatrix}$

3) ***Determinamos la matriz adjunta*** $Adj(B\cdot A)=\begin{pmatrix}8 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix}$

4) ***Finalmente obtenemos la matriz inversa***
$$(B.A)^{-1}=\frac{Adj(B\cdot A)}{|B\cdot A|}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}8 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{30} & \frac{2}{30}\\ -\frac{3}{30} & \frac{3}{30}\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}\frac{4}{15} & \frac{1}{15}\\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}}$$

Recomendación: Puedes rever las tutorías en línea 6 y 11 para revisar el tema Operaciones con matrices y cálculo de matriz inversa.

2) a) Determinar la relativa de los planos $\pi_1 : 2x - 3y + z - 5 = 0$ y $\pi_2 : 4x - 6y + 2z + 4 = 0$, indicando si son paralelos o perpendiculares
posición
.

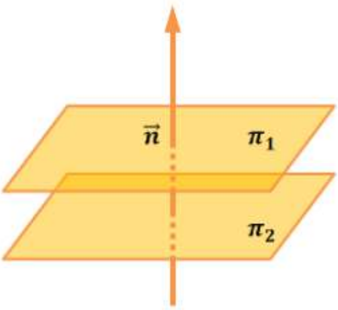
Para determinar si los planos son paralelos o perpendiculares necesitamos los vectores normales de cada uno de ellos

$\pi_1 : 2x - 3y + z - 5 = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_1} = (2;-3;1)$

$\pi_2 : 4x - 6y + 2z + 4 = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_2} = (4;-6;2)$

Analicemos si los vectores normales son paralelos, para ello aplicamos la definición que establece que serán paralelos los vectores normales si se cumple que son proporcionales es decir si se cumple que

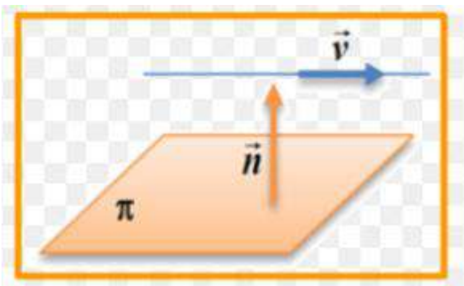
$\boxed{\overrightarrow{n_2} = k\overrightarrow{n_1}}$ o $\boxed{\frac{n_{1x}}{n_{2x}} = \frac{n_{1y}}{n_{2y}} = \frac{n_{1z}}{n_{2z}} = k} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \rightarrow \overrightarrow{n_2} \parallel \overrightarrow{n_1} \rightarrow \boxed{\overrightarrow{\pi_2} \parallel \overrightarrow{\pi_1}}$, *esto se puede observar en la siguiente figura.*



ión: Puedes rever la tutoría en línea 2 para revisar el tema planos paralelos

b) Calcular el valor de $m \in \Re$ para que el plano π_1 dado sea paralelo a la recta de ecuación $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+3}{m} = \frac{z-2}{-1}$

Nuevamente para poder hallar el valor de m debemos trabajar con el vector normal del plano y el vector director de la recta, el plano sea paralelo a la recta el vector normal del plano debe ser perpendicular al vector director de la recta



$\pi_1 : 2x - 3y + z - 5 = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_1} = (2;-3;1)$

$r : \dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y+3}{m} = \dfrac{z-2}{-1} \rightarrow \overrightarrow{v_r} = (-4;m;-1)$

$\boxed{\pi_1 \parallel r \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{v_r}}$

$\overrightarrow{n_1} . \overrightarrow{v_r} = 0 \rightarrow (2;-3;1)\cdot(-4;m;-1) = 0$

$-8 - 3m - 1 = 0 \rightarrow -3m - 9 = 0 \rightarrow -3m = 9 \rightarrow \boxed{m = -3}$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 1 para revisar el tema plano y recta paralelos

c) Hallar la ecuación del plano π_3 que pasa por $P_0 = (1;-3;5)$ y es paralelo al plano $\pi_4 : 5x - y + 4 = 0$

Para hallar la ecuación del plano necesitamos conocer un punto del plano y su vector normal, el dato dado es que el plano es paralelo al plano dado $\pi_4 : 5x - y + 4 = 0$, entonces el vector normal del plano π_4 sirve como normal del plano buscado

Datos para hallar el plano

$$\pi_3 : \begin{cases} P_0 = (1;-3;5) \\ \vec{n}_3 = (5;-1;0) \end{cases}$$

$\boxed{\pi_3 = \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}_3 = 0}$ ***Ecuación del plano***

Calculamos el vector $\overrightarrow{P_0P}$

$\overrightarrow{P_0P} = (x;y;z) - (1;-3;5) = (x-1; y+3; z-5)$

$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}_3 = 0 \rightarrow (x-1; y+3; z-5)\cdot(5;-1;0) = 0$

$\pi_3 : 5(x-1) + (-1)(y+3) + 0.(z-5) = 0$

$\pi_3 : 5x - 5 - y - 3 = 0 \rightarrow \boxed{\pi_3 : 5x - y - 8 = 0}$

Recomendación: Puedes rever el tema Ecuación de un plano en la Unidad 1

3) Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+ky+3z=2 \\ x+y-z=1 \\ 2x+3y+kz=3 \end{cases}$$

Determinar los valores $k\in\Re$, para que el sistema admita solución única, infinitas soluciones y no admita solución

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+ky+3z=2 \\ x+y-z=1 \\ 2x+3y+kz=3 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & k & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & k \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & k \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & k \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = k+3-k(k+2)+3 = k+3-k^2-2k+3 =$$

$$= -k^2-k+6$$

Buscamos los valores que anulan el determinante de A

$$-k^2-k+6=0 \rightarrow k^2+k-6=0 \rightarrow \boxed{k=-3 \vee k=2}$$

A partir de estos valores se analiza el sistema reemplazando en la matriz ampliada por cada uno de ellos.

1) Si $k\neq -3 \wedge k\neq 2 \rightarrow SCD$

2)Evaluamos el sistema en $k=2$, en este caso la matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{cases} x+ky+3z=2 \\ x+y-z=1 \\ 2x+3y+kz=3 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow r(A)=r(A')=2<3 \therefore SCI$$

3)Evaluamos el sistema en $k=-3$, en este caso la matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{cases} x+ky+3z=2 \\ x+y-z=1 \\ 2x+3y+kz=3 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & 9 & -9 & -1 \end{array}\right)\left(\times\frac{1}{4}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right) \rightarrow r(A)\neq r(A') \therefore SI$$

$$\boxed{\begin{array}{l} SCD: \Re-\{-3,2\} \\ SCI: k=2 \\ SI: \ k=-3 \end{array}}$$

Recomendación: Puedes rever las tutorías en línea 27 y 29 para revisar el tema análisis de un sistema de ecuaciones en función de un parámetro

4) *Siendo las matrices* $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ *la matriz X que satisface la ecuación* $XA-B=I$

(I : matriz identidad) es:

- ☐ a) $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
- ☐ b) $X=\begin{pmatrix}9 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$
- ☐ c) $X=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -7 & 3\end{pmatrix}$
- ☐ d) $X=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 13 & 11\end{pmatrix}$

Recomendación: Puedes rever las tutorías en línea 18 y 19 para revisar el tema ecuaciones matriciales

5) *Para qué valores de* $a\in\Re$, *el rango de la matriz es 2, siendo* $A=\begin{pmatrix}a-2 & a+2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

- ☐ a) $\forall a\in\Re-\{6\}$
- ☐ b) $\forall a\in\Re$
- ☐ c) $\nexists a\in\Re$
- ☐ d) $a=6$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 15 para revisar el tema rango de una matriz

6) *Sabiendo que* $|A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=2$, *entonces el determinante* $|B|=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 2\\ a & b & c\\ 4-a & 4-b & 4-c\end{vmatrix}$ *es:*

- ☐ a) $|B|=8$
- ☐ b) $|B|=4$
- ☐ c) $|B|=-8$
- ☐ d) $|B|=-4$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 14 para revisar el tema propiedades de los determinantes

7) *Los valores de* $m\in\Re$ *tales que la matriz A no sea regular siendo* $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & m & 4\\ -1 & 3 & m\end{pmatrix}$ *son:*

- ☐ a) $m\neq-6 \wedge m\neq 2$
- ☐ b) $m=-6 \vee m=2$
- ☐ c) $\nexists m\in\Re$
- ☐ d) $\forall m\in\Re$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 21 para revisar el tema matriz inversa.

8) El o los valores de $x \in \Re$ *que verifican la ecuación* $\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & 2 & x \\ 4 & 0 & -x \end{vmatrix} = 2$

- ☐ *a)* $x = -1 \vee x = 3$
- ☐ *b)* $\forall x \in \Re$
- ☐ *c)* $x \neq -1 \wedge x \neq 3$
- ☐ *d)* $\nexists x \in \Re$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 13 para revisar el tema cálculo de determinantes

9) Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - 2y + z = 3 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ *entonces el conjunto solución del sistema homogéneo asociado es:*

- ☐ *a)* $\varnothing$
- ☐ *b)* $\{(0;0;0)\}$
- ☐ *c)* $\left\{\lambda\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right), \lambda \in \Re\right\}$
- ☐ *d)* $\left\{\lambda\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};1\right), \lambda \in \Re\right\}$

Recomendación: Puedes rever las tutorías en línea 25 y 26 para revisar el tema resolución de sistemas de ecuaciones lineales compatibles indeterminados

10) En una economía hipotética de dos industrias A y B la matriz de los coeficientes tecnológicos es $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Si el vector producción es $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 30 \\ 35 \end{pmatrix}$, *entonces la demanda final es:*

- ☐ *a)* $\mathrm{DF} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$
- ☐ *b)* $\mathrm{DF} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$
- ☐ *c)* $\mathrm{DF} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix}$
- ☐ *d)* $\mathrm{DF} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 16 para revisar el tema Matriz de Insumo Producto