UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 1er. parcial - 18/09/24 - Tema 7

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

  Considerá el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_4 = 0\}$. Decidí qué opción muestra un conjunto de generadores de S.

  A) $\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1)\}$
  B) $\{(1, 1, 0, -1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, -1)\}$
  C) $\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$
  D) $\{(0, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)\}$

  Opción correcta: C)
  Resolución
  El conjunto $\{(1, 1, 0, -1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, -1)\}$ tiene su primer vector que es suma de los otros dos con lo cual genera un espacio de 2 dimensiones, una menos que las que tiene S. Tomando la combinación lineal $m(1, 0, 0, -1)+n(0, 1, 0, 0)+k(0, 0, 1, 0) = (m, n, k, -m)$, reemplazando esto en la ecuación $x_1+x_4 = 0$ tenemos la igualdad correcta $m+(-m) = 0$, lo que muestra que el conjunto genera S. Operando de la misma forma vemos que el conjunto $\{(0, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)\}$ no cumple la ecuación, lo mismo que $\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1)\}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

  Elegí la opción que muestra un vector que sea combinación lineal de $(1, 2, -1)$ y $(-1, -1, 2)$.

  A) $(-1, 0, 3)$
  B) $(0, 1, -1)$
  C) $(2, 3, 3)$
  D) $(0, -1, 1)$

  Opción correcta: A)
  Resolución
  Para obtener la respuesta correcta escribimos la combinación lineal:
  $(1, 2, -1) + 2(-1, -1, 2) = (-1, 0, 3)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

  Considerá las siguientes cónicas: $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 9\}$,
  $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + y^2 + 6y = -6\}$.
  Indicá la única opción que muestra una afirmación verdadera.

  A) M y N no se intersecan en ningún punto.
  B) M y N se intersecan en exactamente dos puntos.
  C) M y N se intersecan en un único punto.
  D) M y N se intersecan en más de dos puntos.

  Opción correcta: C)
  Resolución
  Se puede proceder identificando de cada cónica sus elementos, reconociendo que la primera es una circunferencia de centro $(-4, -3)$ y radio 3, en cuanto a la segunda se trata de una elipse de centro $(0, -3)$, eje focal paralelo al eje y y cuya longitud de eje mayor es $\sqrt{3}$ y longitud de eje menor es 1. Al realizar las gráficas se puede verificar que las cónicas solo se cortan en un punto, $(-1, -3)$ al cual también se puede arribar mediante el planteo de un sistema de ecuaciones. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

  Considerá la parábola de ecuación $y^2 - 5x + 4 = 8y$. Indicá la opción que muestra la ecuación de su directriz y su foco.

  A) $y = \frac{5}{2}$; $F = (0, 8; 4)$
  B) $x = 3, 65$; $F = (1, 15; 4)$
  C) $x = 2, 4$; $F = (2, 5; 4)$
  D) $x = -3, 65$; $F = (-1, 15; 4)$

Opción correcta: D)
Resolución
Lo primero que podemos hacer es reescribir la ecuación dada. Completando cuadrados se puede obtener la escritura: $(y-4)^2 = 5 \cdot (x+2,4)$ de donde se lee el vértice de la parábola es $(-2,4;4)$ y que $p = 2,5$. A partir de la lectura y de estos datos obtenidos se deduce que la recta directriz es paralela al eje y y su ecuación es $x = -2,4 - 2,5 : 2 = -3,65$. Además, las coordenadas del foco son: $(-2,4 + 2,5 : 2; 4) = (-1,15; 4)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
Al vector $\vec{u} = \left(\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)$ se le aplica una dilatación $\beta \in \mathbb{R}$ y, luego, una traslación de dirección $(5,-2,-3)$ y se obtiene el vector $(8,-3,-1)$. Elegí la única opción que muestra el valor de β.

A) $\frac{1}{7}$ B) 7 C) $-\frac{1}{7}$ D) -7

Opción correcta: B)
Resolución
La ecuación vectorial $\beta\left(\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right) + (5,-2,-3) = (8,-3,-1)$ permite encontrar el vector de β. Si se expresa el primer término como un solo vector, aplicando las operaciones correspondientes, y se iguala coordenada a coordenada, se podrá obtener el valor de β. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
Considerá los puntos en $\mathbb{R}^3$: $A = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $B = \left(0, \frac{4}{3}, -\frac{7}{3}\right)$, $C = (1, m, -m)$ y $D = (1, 0, -m)$. Elegí la única opción que muestra todos los valores de m de manera tal que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ tengan el mismo módulo.

A) $m = \frac{23}{3}$ B) $m \in \mathbb{R}$ C) $|m| = \sqrt{\frac{23}{3}}$ D) $|m| = \frac{\sqrt{23}}{3}$

Opción correcta: C)
Resolución
Las coordenadas del vector $\vec{AB}$ se obtienen como $B - A$. Análogamente, es posible calcular las coordenadas del vector $\vec{CD} = D - C$. A continuación, se puede calcular el módulo de cada vector e igualarlos. Con estos cálculos llegás a la igualdad: $\frac{23}{3} = m^2$. De esta ecuación podrás obtener los valores de m. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)
Considerá las ecuaciones de las rectas r_1, r_2 en el espacio y elegí la opción que describe la posición relativa entre ambas.

$$\begin{cases} r_1 : (x,y,z) = k\left(-\frac{4}{3}, 0, -3\right) + (-1,2,3), k \in \mathbb{R} \\ r_2 : (x,y,z) = t\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{7}, -\frac{2}{9}\right) + (-2,-5,6), t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

A) Las rectas son paralelas.
C) Las rectas son ortogonales.
B) Las rectas son coincidentes.
D) Las rectas son concurrentes.

Opción correcta: C)
Resolución
Como los vectores directores no son múltiplos podemos descartar que las rectas sean paralelas. La intersección entre las rectas es vacía por lo tanto tampoco pueden ser coincidentes ni concurrentes. La única opción posible es que sean ortogonales debido a que el producto escalar entre sus vectores directores es nulo. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

  Elegí la opción que muestra las coordenadas del punto simétrico a $A = (7, -10, -1)$ respecto del plano de ecuación $2x - 3y + z = 1$

  A) $(2, -3, 1)$ B) $(5, -8, 7)$ C) $(1, -1, -4)$ D) $(-5, 8, -7)$

  Opción correcta: D)

  Resolución

  Para encontrar el simétrico de un punto respecto de un plano se puede hallar la ecuación de la recta normal al plano que contenga al punto A, buscar el punto B intersección entre dicha recta y el plano y, por último, plantear que ese punto B es el punto medio entre A y su simétrico A'. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.