UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 1er. parcial - 18/09/24 - Tema 3

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)
  Elegí la opción que muestra el valor de $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ para que el conjunto $\{(1,0,-1),(-1,k,0),(0,-2,k+1)\}$ no sea una base de $\mathbb{R}^3$.

  A) -2 B) 1 C) 2 D) -1

  Opción correcta: B)
  Resolución
  Como el conjunto no debe ser una base entonces los vectores deben ser L.D. con lo cual el determinate de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & -2 & k+1 \end{pmatrix}$ debe ser cero. De esto obtenemos que $k^2+k-2=0$ que tiene por soluciones $k=1$ y $k=-2$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)
  Considerá el subespacio $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : nx_1+2x_2=0 \wedge x_2+mx_3-x_4=0\}$.
  Elegí la opción que muestra los valores de n y m que hacen que el subespacio tenga como base al conjunto $\{(-2,1,0,1),(0,0,1,3)\}$.

  A) $n=-1$ y $m=3$
  C) $n=-1$ y $m=-3$
  B) $n=1$ y $m=-3$
  D) $n=1$ y $m=3$

  Opción correcta: D
  Resolución
  La única forma de reemplazo que nos da información es reemplazar las componentes de $(-2,1,0,1)$ en $nx_1+2x_2=0$ y las componentes de $(0,0,1,3)$ en $x_2+mx_3-x_4=0$, a partir de esto obtenemos el sistema: $\begin{cases} m-3=0 \\ -2n+2=0 \end{cases}$ de donde obtenemos que $m=3$ y $n=1$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)
  Indicá el valor que debe tomar $k \in \mathbb{R}$ para que $36y^2+4x^2-2ky=27$ corresponda a la ecuación de una elipse con centro $(0;0,5)$

  A) $k=18$ B) $k=-0,5$ C) $k=0$ D) $k=-18$

  Opción correcta: A)
  Resolución
  A partir del método de completar cuadrados, se puede reescribir a la ecuación dada como: $\frac{x^2}{9}+\left(y-\frac{k}{36}\right)^2=\frac{3}{4}+\frac{k^2}{1296}$. Desde esta última expresión se puede leer que el centro de la elipse es $(0;0,5)$ únicamente para $k=18$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
  La hipérbola H tiene excentricidad $2,25$ y sus focos son $F_1=(0,-8)$ y $F_2=(0,10)$.
  Indicá cuál resulta la única afirmación verdadera acerca de H.

  A) $(0,2)$ es el centro de H.
  B) $(\sqrt{195},9) \in H$.
  C) $(\sqrt{195},-7) \notin H$.
  D) $(0,4)$ es uno de los vértices de H.

Opción correcta: B)
Resolución
A partir de conocer los focos de H es posible obtener su centro, pues resulta el punto medio entre ellos: $(0,1)$. Usando que la excentricidad de H se calcula como el cociente entre la mitad de la distancia entre los focos, y la mitad de la distancia entre los vértices, podemos deducir que este último valor será 4. En consecuencia, los vértices de H son $(0,5)$ y $(0,-3)$. Luego, la primera y tercera afirmación resultan falsas. Además, usando la relación $c^2 = a^2 + b^2$, deducimos el tercer dato que nos falta para construir la ecuación canónica de H, la cual nos queda: $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{x^2}{65} = 1$. Reemplazando las coordenadas de cada punto que se mencionan en las opciones B) y C) verificamos que los dos pertenecen a H, luego la única afirmación correcta es la B). Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
Elegí la opción que muestra las coordenadas de un vector $\vec{w}$ de norma $3\sqrt{30}$ que es paralelo al vector $\vec{v} = \left(\frac{5}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}\right)$.

A) $(-15,-3,-6)$

B) $\left(\frac{15\sqrt{30}}{7}, -\frac{3\sqrt{30}}{7}, -\frac{6\sqrt{30}}{7}\right)$

C) $(-15,3,6)$

D) $\left(\frac{-15\sqrt{30}}{7}, \frac{3\sqrt{30}}{7}, \frac{6\sqrt{30}}{7}\right)$

Opción correcta: C)
Resolución
$\vec{w} = k \cdot \left(\frac{5}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}\right)$, con $k \neq 0$ es un vector paralelo a $\vec{v}$. Dado que $||\vec{w}|| = 3\sqrt{30}$ entonces se debe plantear la ecuación: $\sqrt{\left(\frac{5k}{7}\right)^2 + \left(-\frac{k}{7}\right)^2 + \left(-\frac{2k}{7}\right)^2} = 3\sqrt{30}$. Esta ecuación tiene dos soluciones y para una de esas soluciones se obtiene la respuesta correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
Considerá los vectores de $\mathbb{R}^3$ $\vec{v}$ y $\vec{w}$. El vector $\vec{v}$ tiene norma 4, $\vec{w}$ un vector de norma $\sqrt{3}$ y el ángulo determinado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es $\frac{3\pi}{4}$. Elegí la única opción que muestra el resultado del producto escalar entre dichos vectores.

A) $-2\sqrt{6}$

B) $-0{,}5\sqrt{6}$

C) $2\sqrt{6}$

D) $-2\sqrt{2}$

Opción correcta: A)
Resolución
El producto escalar entre dos vectores se calcula mediante la fórmula $\vec{v} \cdot \vec{w} = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot \cos(\alpha)$. Reemplazar los datos del enunciado en esta expresión permite obtener la respuesta correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)
Elegí la opción que indica el valor que corresponde a la distancia del punto $A = (-1,2,3)$ al plano de ecuación $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z + 1 = 0\}$.

A) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

B) $\sqrt{6}$

C) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$

D) 0

Opción correcta: A)
Resolución
Para calcular la distancia de un punto A a un plano Π los pasos a seguir son: escribir la ecuación de la recta r normal al plano Π que contiene al punto A, calcular el punto B como intersección entre la recta r y el plano Π y, por último, calcular la distancia entre los puntos A y B. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)
  Considerá la recta de ecuación $(x; y; z) = \alpha \cdot (3, 6, 9) + (4, 2, -1)$ y el plano de ecuación $-x + y - z = 1$. Elegí la única afirmación verdadera.

  A) La recta está contenida en el plano.

  B) La recta y el plano son paralelos.

  C) La recta y el plano son ortogonales.

  D) La recta y el plano se cortan en un único punto.

  Opción correcta: D)
  Resolución
  Todo punto de la recta puede escribirse como $(3\alpha+4, 6\alpha+2, 9\alpha-1)$ siendo $\alpha \in \mathbb{R}$. Si se reemplaza este punto en la ecuación del plano, se obtiene un único valor de α de manera tal que la recta y el plano se intersecan en un único punto: $(3, 0, -4)$. Además, puede probarse que no son ortogonales la recta y el plano porque sus vectores directores no son paralelos. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.