[redacted] **ÁLGEBRA (FCE) (71)** (Cátedra: GACHE) .UBA XXI
1° PARCIAL

30/09/22 **TEMA 5**

PUNTAJE	1) 2 puntos	2) a) 1 punto b) 1 punto	3) 2,5 puntos	4 al 10) 0,5 cada uno

1) Hallar las matrices $X=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ *tales que se verifique que* $X^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dada $X=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ *debemos hallar las matrices que verifican la siguiente condición* $X^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Primero debemos hallar la matriz X^2

$$X^2=X\,.\,X=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

Sabemos que

$$X^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases} a^2=1\rightarrow \boxed{a=\pm 1} \\ a+b=0\rightarrow \boxed{b=-a} \\ b^2=1\rightarrow \boxed{b=\pm 1} \\ c^2=1\rightarrow \boxed{c=\pm 1} \\ b+c=0\rightarrow \boxed{c=-b} \end{cases}$$

Tenemos entonces dos posibles matrices X, *que verifican lo pedido*

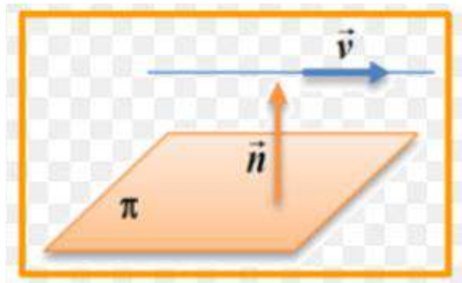
$$Si\ \ \boxed{a=1\rightarrow b=-1\rightarrow c=1}\rightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Si\ \ \boxed{a=-1\rightarrow b=1\rightarrow c=-1}\rightarrow X=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 6 para revisar el tema Operaciones con matrices

2) a) Se considera la recta r que pasa el punto $P_0 = (3;0;0)$ *y tiene vector director* $\vec{v} = (1;1;-1)$ *y el plano de ecuación* $\pi_1 : 3x - ay + 2z - 1 = 0$. *¿Existe algún valor de a para que la recta sea paralela al plano?*

Para poder hallar el valor de a debemos trabajar con el vector normal del plano y el vector director de la recta, para que el plano sea paralelo a la recta el vector normal del plano debe ser perpendicular al vector director de la recta



Debemos plantear

$$\pi_1 : 3x - ay + 2z - 1 = 0 \rightarrow \vec{n_1} = (3;-a;2)$$

$$r \rightarrow \vec{v_r} = (1;1;-1)$$

$$\boxed{\pi_1 \parallel r \Leftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{v_r}}$$

$$\vec{n_1} . \vec{v_r} = 0 \rightarrow (3;-a;2) \cdot (1;1;-1) = 0$$

$$3 - a - 2 = 0 \rightarrow -a + 1 = 0 \rightarrow a = 1 \rightarrow \boxed{a = 1}$$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 1 para revisar el tema plano y recta paralelos

b) Hallar la ecuación simétrica de la recta l que pasa por $P_1 = (1;-2;6)$ *es perpendicular al plano* $\pi_2 : 3x - 2y + z - 4 = 0$

Si la recta s debe ser perpendicular al plano,
el vector normal del plano funciona como vector director de la recta
Los datos de la recta l son :

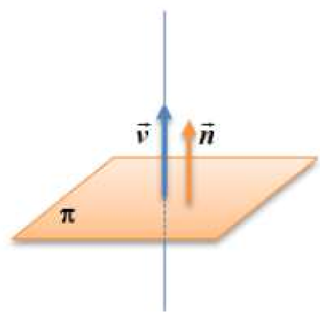
$\pi_2 : 3x - 2y + z - 4 = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_2} = (3;-2;1)$

$P_1 = (1;-2;6)$

La ecuación de la recta l en forma vectorial es :

$l : (x;y;z) = (1;-2;6) + \lambda(3;-2;1)$

$$\boxed{l : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-6}{1}}$$



Recomendación: *Puedes rever la tutoría en línea 1 para revisar el tema plano y recta perpendiculares*

3) Dados las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&3k\\3&k&-3\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$

Determinar los valores $k\in\Re$ ***, para que el sistema*** $A.X=B$ ***admita solución única, infinitas soluciones y no admita solución.***

Dado el sistema de ecuaciones

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&3k\\3&k&-3\end{pmatrix}\to|A|=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&2&3k\\3&k&-3\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}2&3k\\k&-3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0&3k\\3&-3\end{vmatrix}=-6-3k^2+9k=-3k^2+9k-6$$

Buscamos los valores que anulan el determinante de A

$$-3k^2+9k-6=0\to k^2-3k+2=0\to\boxed{k=1\vee k=2}$$

A partir de estos valores se analiza el sistema reemplazando en la matriz ampliada por cada uno de ellos.

1) ***Si*** $k\neq1\wedge k\neq2\to SCD$
2) ***Evaluamos el sistema en*** $k=1$***, en este caso la matriz ampliada del sistema es:***

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&3k\\3&k&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}\to\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&0&2\\0&2&3&2\\3&1&-3&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\0&2&3&2\\0&-2&-3&-2\end{array}\right)\frac{1}{2}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\0&\boxed{1}&\frac{3}{2}&1\\0&-2&-3&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{3}{2}&1\\0&1&\frac{3}{2}&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to r(A)=r(A')=2<3\therefore SCI$$

$$\to r(A)=r(A')=2<3\therefore SCI$$

3) ***Evaluamos el sistema en*** $k=2$***, en este caso la matriz ampliada del sistema es:***

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&3k\\3&k&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}\to\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&0&2\\0&2&6&2\\3&2&-3&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\0&2&6&2\\0&-1&-3&-2\end{array}\right)(-1)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\0&2&6&2\\0&\boxed{1}&3&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-3&0\\0&0&0&-2\\0&1&3&2\end{array}\right)\to r(A)\neq r(A')\therefore SI$$

$$\boxed{\begin{array}{l}SCD:\Re-\{1,2\}\\SCI:k=1\\SI:\quad k=2\end{array}}$$

Recomendación: Puedes rever las tutorías en línea 27 y 29 para revisar el tema análisis de un sistema de ecuaciones en función de un parámetro

4) *Siendo las matrices* $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ *y* $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ *la matriz X que satisface que* $AX+B=C$ *es:*

- ☐ *a)* $X=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ -6 & 2\end{pmatrix}$
- ☐ *b)* $X=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$
- ☐ *c)* $X=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -4 & 2\end{pmatrix}$
- ☐ *d)* $X=\begin{pmatrix}10 & 8\\ -7 & -5\end{pmatrix}$

Recomendación: Puedes rever las tutorías en línea 18 y 19 para revisar el tema ecuaciones matriciales

5) *Para qué conjunto de valores del parámetro* $k\in\Re$, *el rango de la matriz es 3, siendo* $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ k & 2 & -1\\ 1 & 1 & k\end{pmatrix}$

- ☐ *a)* $\{0,2\}$
- ☐ *b)* $\forall k\in\Re$
- ☐ *c)* $\nexists k\in\Re$
- ☐ *d)* $\forall k\in\Re-\{0,2\}$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 15 para revisar el tema rango de una matriz

6) *Sabiendo que* $|A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=10$, *entonces el determinante* $|B|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ a-2 & b-2 & c-2\\ 6-4a & 6-4b & 6-4c\end{vmatrix}$ *es:*

- ☐ *a)* $|B|=-30$
- ☐ *b)* $|B|=-120$
- ☐ *c)* $|B|=30$
- ☐ *d)* $|B|=120$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 14 para revisar el tema propiedades de los determinantes

7) *El conjunto de valores de* $m\in\Re$ *tales que la matriz A admita inversa siendo* $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & m\\ m & 0 & -1\\ 6 & -1 & 0\end{pmatrix}$ *es:*

- ☐ *a)* $\Re$
- ☐ *b) sólo si* $m=1$
- ☐ *c)* $\varnothing$
- ☐ *d) sólo si* $m=0$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 21 para revisar el tema matriz inversa.

8) *El o los valores de* $x\in\Re$ *que verifican la ecuación* $\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & x & c\\ a & b & x\end{vmatrix}=0$ *son:*

- ☐ *a)* $x=b\vee x=c$
- ☐ *b)* $\forall x\in\Re$
- ☐ *c)* $x\neq b\wedge x\neq c$
- ☐ *d)* $\nexists x\in\Re$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 13 para revisar el tema cálculo de determinantes

9) Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + \ 2y - z = 1 \\ -x + y + 2z = 3 \\ \quad x + 5y = 5 \end{cases}$ *entonces el conjunto solución del sistema es:*

- ☐ *a)* $\varnothing$
- ☐ *b)* $\{(5-5y; y; 4-3y), y \in \Re\}$
- ☐ *c)* $\{(5;0;4)\}$
- ☐ *d)* $\{(0;0;0)\}$

***Recomendación:** Puedes rever las tutorías en línea 25 y 26 para revisar el tema resolución de sistemas de ecuaciones lineales compatibles indeterminados*

10) En una economía hipotética de dos industrias A y B la matriz de los coeficientes tecnológicos es $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Si el vector demanda final es $DF = \begin{pmatrix} 330 \\ 110 \end{pmatrix}$ *, entonces el vector producción es:*

- ☐ *a)* $X = \begin{pmatrix} 250 \\ 450 \end{pmatrix}$
- ☐ *b)* $X = \begin{pmatrix} 264 \\ 22 \end{pmatrix}$
- ☐ *c)* $X = \begin{pmatrix} 450 \\ 250 \end{pmatrix}$
- ☐ *d) Ninguna de las respuestas anteriores*

***Recomendación:** Puedes rever la tutoría en línea 16 para revisar el tema Matriz de Insumo Producto*