UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 12/06/2024 - Tema 11

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considerá los complejos: $z_1 = 2\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ y $z_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i}$. Elegí la opción que muestra el cociente entre $Im[(z_1)^7]$ y $Im[\overline{z_2}]$.

A) $64\sqrt{3}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $-64\sqrt{6}$ D) $-32\sqrt{6}$

Opción correcta: C)

Resolución: para resolver este ejercicio, primero hay que expresar en forma binómica cada uno de los complejos y, luego, realizar el cociente en las partes imaginarias.

$z_1 = 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Luego: $(z_1)^7 = 2^7\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right) = 2^7\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 128\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 64 + 64\sqrt{3}i$

$z_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i} = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ Luego: $\overline{z_2} = \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

El último cálculo a realizar es $\frac{Im[(z_1)^7]}{Im[\overline{z_2}]} = 64\sqrt{3} : \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$. El resultado de este cociente es la respuesta al problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Elegí la opción que contiene una solución $z \in \mathbb{C}$ de la ecuación $z^3 = (1+i)(3-2i)^3$.

A) $(3+2i)\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{9}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{9}{12}\pi\right)\right)$
B) $(3-2i)\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{17}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{17}{12}\pi\right)\right)$
C) $(3-2i)\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right)\right)$
D) $(3+2i)\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{17}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{17}{12}\pi\right)\right)$

Opción correcta: B)

Resolución: la ecuación $z^3 = (1+i)(3-2i)^3$ puede ser escrita como $\left(\frac{z}{3-2i}\right)^3 = 1+i$. Es decir que $\frac{z}{3-2i}$ es una raíz cúbica de 1+i. Esas raíces cúbicas tienen como módulo $\sqrt[6]{2}$ y argumentos $\frac{\pi}{12}$, $\frac{9\pi}{12}$ y $\frac{17\pi}{12}$.Por lo tanto, de las opciones ofrecidas, es solución aquella que tiene el argumento $\frac{17\pi}{12}$ y debe estar multiplicada por el complejo $3-2i$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) = mx^4 + 5x^3 + 6n$, con $n, m \in \mathbb{R}$. Indicá los valores de n y m de modo tal que P tenga resto -5 al dividirlo por el polinomio $(x+1)$ y resto 100 al dividirlo por $(x-2)$.

A) $m = -\frac{2}{3}$ y $n = -4$
B) $m = \frac{2}{3}$ y $n = 4$
C) $m = -4$ y $n = \frac{2}{3}$
D) $m = 4$ y $n = -\frac{2}{3}$

Opción correcta: D)

Resolución: por el Teorema del Resto, sabemos que el resto de dividir a un polinomio por $(x-a)$ se obtiene evaluando este en a. Entonces, $P(-1) = -5$ y $P(2) = 100$. A partir del planteo de estas ecuaciones es posible deducir que $n = -\frac{2}{3}$ y $m = 4$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
Considerá los polinomios y $P = x^4 + 85x^2 + 324$ y $Q(x) = (x^2 + 81)(x^2 - 4)$. Indicá la opción que contiene una afirmación verdadera acerca de estos polinomios.

A) $(x^2 + 4)$ divide a P y también divide a Q.
B) $-2i$ es raíz doble de P y raíz simple de Q.
C) $-2i$ es raíz doble de P y no es raíz de Q.
D) $(x - 9i)$ divide a P y también divide a Q.

Opción correcta: D)
Resolución: realizando la división de P por $(x^2 + 4)$, nos da resto cero; haciendo lo mismo con Q notaremos que el resto es no nulo, luego la primera de las opciones es falsa. Siguiendo, podemos ver que $P(-2i) = 0$ y $Q(-2i) \neq 0$, luego la segunda opción es falsa. Además, al factorizar a P se puede comprobar que es raíz simple, puesto que $P(x) = (x^2+4)(x^2+81) = (x-2i)(x+2i)(x-9i)(x+9i)$. Como $P(9i) = 0$, esto nos dice que $(x - 9i)$ divide a P y como $Q(9i) = 0$ lo mismo ocurre con Q, por lo que la última de las opciones es verdadera. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
Considerá las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & 1 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 1 & -5 \\ -2 & -11 & -8 & -11 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 7 & \frac{1}{2} \\ -10 & \frac{2}{5} & 5 \end{pmatrix}$
Elegí la única afirmación verdadera.

A) Todas poseen distinto rango.
B) $rg(A) = rg(B) = 2$.
C) Todas poseen el mismo rango.
D) $rg(B) = rg(C) = 3$

Opción correcta: B)
Resolución: en la matriz A una fila es combinación lineal de las otras dos, por ejemplo $F_1 = F_2 - F_3$ Y dado que F_2 y F_3 son linealmente independientes,resulta $rg(A) = 2$. La matriz B posee dos columnas iguales, luego de eliminar una de ellas; mediante el procedimiento de triangulación podemos llegar ,por ejemplo, a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ -2 & -11 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ por lo que podemos afirmar que $rg(B) = 2$. La matriz $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 7 & \frac{1}{2} \\ -10 & \frac{2}{5} & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -10 & \frac{2}{5} & 5 \\ 0 & 7 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ posee 3 filas linealmente independientes, por lo que $rg(C) = 3$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
Considerá el sistema lineal $S = \begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x - y + 2z = b \\ x - 5y + 8z = c \end{cases}$. Elegí la única opción que muestra las condiciones que deben cumplir $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que el sistema tenga solución.

A) $2a = b - c$
B) $2a - b + c \neq 0$
C) $2a - 2b + c = 0$
D) $2a - b = c$

Opción correcta: A)
Resolución: este problema se resuelve utilizando el método de triangulación de Gauss. Se puede reescribir el sistema $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ -7y + 11z = -3a + b \\ 0 = 2a - b + c \end{cases}$, el cual es compatible para cualquier terna donde $2a - b + c = 0$. Esta expresión es equivalente a la propuesta en la opción A). Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 8, 9 y 10.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$; $T(x_1; x_2; x_3; x_4) = (x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4; x_1 - 2x_2 + 4x_4; x_2 - x_4)$. Indicá la única opción que muestra una base para el núcleo de T.

A) $\{(0; 0; 0; 0)\}$

B) $\{(-2; 1; 0); (-2; 1; 1); (1; 0; 1)\}$

C) $\{(1; 1; 0; -1); (-2; -2; 2; 2)\}$

D) $\{(-2; 1; 0; 1)\}$

Opción correcta: D) Resolución: para hallar una base para el $Nu(T)$, lo que debemos hacer es resolver el sistema de ecuaciones que surge al plantear:

$$T(x_1; x_2; x_3; x_4) = (0; 0; 0). \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_4 & = 0 \\ x_2 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, podemos llegar a que el conjunto solución es $(-2x_4; x_4; 0; x_4)$ con x_4 libre. Esto nos dice que el subespacio Núcleo de T estará generado por $\langle(-2; 1; 0; 1)\rangle$. Luego, la opción correcta será la última. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 11 y 12.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

Considerá las transformaciones lineales $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donde: $M_{T_1} = \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y, $T_2(x_1; x_2; x_3) = (-21x_1 + 3x_2; -14x_1 + 2x_2)$. Indicá entre las opciones, la única afirmación verdadera.

A) T_1 y T_2 tienen la misma expresión matricial.

B) La matriz de $T_2 \circ T_1$ es la matriz identidad.

C) La matriz de $T_1 \circ T_2$ es la matriz nula.

D) La matriz de T_1 es la inversa de la matriz de T_2.

Opción correcta: C)

Resolución: lo primero que podemos hacer es hallar la matriz de T_2 a partir del dato que tenemos de su expresión funcional: $M_{T_2} = \begin{pmatrix} -21 & 3 \\ -14 & 2 \end{pmatrix}$ Por lo que podemos decir que la primera opción es falsa. Además, podemos hallar las composiciones $T_2 \circ T_1$ y $T_1 \circ T_2$, para analizar las otras opciones. Recordemos que para componer transformaciones lineales se puede hacer el producto de las matrices en el orden que indica la composición.

Por un lado, $M_{T_1 \circ T_2} = T_1 \cdot T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por otro lado, $M_{T_2 \circ T_1} = T_2 \cdot T_1 = \begin{pmatrix} -204 & 306 \\ -136 & 204 \end{pmatrix}$

Luego, como en ambas composiciones obtenemos una matriz diferente de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: podemos descartar la segunda opción. Finalmente, la tercera opción es la correcta. Observemos que la última se descarta de inmediato dado que una matriz por su inversa debe darnos la matriz identidad. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 11 y 12.
