UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 1er. parcial - 18/09/24 - Tema 16

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)
 Considerá el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 = 0\}$. Elegí la única opción correcta.

 A) El conjunto $\{(0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ es una base del subespacio S.
 B) La dimensiión de S es 4.
 C) El conjunto $\{(1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0)\}$ es un sistema de generadores de S.
 D) El vector $(3; 2; 2; 1)$ pertenece al subespacio S.

 Opción correcta: C)
 Resolución
 Dado el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3, x4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_2 = 0\}$, nos piden elegir la opción correcta. Para saber si el conjunto $\{(1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0)\}$ genera el subespacio S, debemos encontrar si existe una combinación lineal de estos vectores tales que $x_2 + x_2 = 0$. O sea, $k(1, 0, 0, 0)+t(0, 0, 0, 1)+s(0, -1, 1, 0) = (x_1, -x_3, x_3, x_4) \to (k, -s, s, t) = (x_1, -x_3, x_3, x_4)$ Es fácil comprobar que $x_2 + x_3 = 0$ porque $(-s) + s = 0$. Luego este enunciado es el único verdadero. Al tener S tres vectores se descartan las dos primeras opciones. También es falsa la última opción dado que ese vector no verifica la ecuación de S. Estos contenidos los encontrás en la sesión 4.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)
 Considerá los siguientes planos:
 $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) = \alpha(2, 3, 0) + \beta(1, 0, -1) \ ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3\}$
 $\Pi' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) = \gamma(1, 0, -3) + \delta(1, -1, 0) \ ; \gamma, \delta \in \mathbb{R}^3\}$.
 Elegí la opción que muestra un conjunto de vectores que es base del subespacio $\Pi \cap \Pi'$.

 A) {(-3,2,-3)}
 B) {(-11,-6,-15)}
 C) {(-3,2,-3); (-3,-3,-1)}
 D) {(-11,6,15)}

 Opción correcta: D)
 Resolución
 Si se busca la recta intersección de los planos y se considera su vector director como base del subespacio, se obtiene la base correcta $\{(-7, 12, 15)\}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)
 Indicá la opción que muestra el centro C y radio r de circunferencia de ecuación $4x^2 + 4y^2 = 10x - 2y - \frac{25}{4}$.

 A) $C = \left(\dfrac{5}{4}; -\dfrac{1}{4}\right)$ y $r = \dfrac{1}{4}$
 B) $C = \left(-\dfrac{5}{4}; \dfrac{1}{4}\right)$ y $r = \dfrac{1}{4}$
 C) $C = \left(\dfrac{5}{4}; -\dfrac{1}{4}\right)$ y $r = \dfrac{1}{16}$
 D) $C = \left(-\dfrac{5}{4}; -\dfrac{1}{4}\right)$ y $r = 4$

 Opción correcta: A)
 Resolución
 Al completar cuadrados se logra obtener la ecuación canónica de la circunferencia dada, esta nos queda: $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ de donde se puede leer el centro y radio pedidos. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá la hipérbola H cuyos puntos cumplen la ecuación $25\left(x-\frac{9}{8}\right)^2-4(y+2)^2=100$. Indicá la opción que muestra los valores de $k\in\mathbb{R}_{<0}$ y $t\in\mathbb{R}$ para los cuales se cumple que $y=5kx+\dfrac{t}{16}$ es una de las asíntotas de H.

A) $k=-\dfrac{5}{2}$ y $t=16$

B) $k=-\dfrac{5}{2}$ y $t=77$

C) $k=-\dfrac{2}{5}$ y $t=\dfrac{124}{5}$

D) $k=-\dfrac{1}{2}$ y $t=13$

Opción correcta: D)

Resolución

A partir de la lectura de la ecuación canónica de la hipérbola, se obtiene que $a=2$ y $b=5$. Además se deduce que el eje focal es paralelo al eje x. Luego, las pendientes de las asíntotas de H son $\frac{5}{2}$ y $-\frac{5}{2}$. Considerando la pendiente negativa y además sabiendo que la recta pasa por el punto $\left(\frac{9}{8};-2\right)$, la ecuación de la asíntota del enunciado es $y=-\frac{5}{2}x+\frac{13}{16}$ por lo que los valores de k y t correspondientes son $k=-\frac{1}{2}$ y $t=13$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

El vector $(2,-1,5)$ es ortogonal al vector $(-9,a,b)$ y también ortogonal al vector $(2,1,-a)$. Indicá cuál es la única opción que muestra los valores de a y b.

A) $a=-\dfrac{3}{5}; b=-\dfrac{87}{25}$

B) $a=\dfrac{3}{5}; b=\dfrac{93}{25}$

C) $a=\dfrac{3}{5}; b=\dfrac{87}{25}$

D) $a=0; b=\dfrac{18}{5}$

Opción correcta: B)

Resolución

Recordando que si dos vectores son ortogonales entonces el producto escalar entre ellos es cero, podemos plantear las dos condiciones: $(2,-1,5)\cdot(-9,a,b)=0$ y $(2,-1,5)\cdot(2,1,-a)=0$. De allí se derivan dos ecuaciones de donde se pueden determinar a y b. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá los siguientes datos: $\vec{v_1}=(7,-24)$; $\vec{v_2}=(12,-10)$ y $\vec{v_3}=||\vec{v_1}||\cdot\vec{v_2}-\vec{v_1}$. Indicá la única opción que muestra el resultado de hacer $\vec{v_1}\cdot\vec{v_3}$.

A) 7475

B) $(2051,5424)$

C) 3373

D) $(293,-226)$

Opción correcta: A)

Resolución

Lo primero que podemos ver es que primero necesitamos hallar las coordenadas de $\vec{v_3}$ y para esto, la norma de $\vec{v_1}$: $||\vec{v_1}||=\sqrt{(-24)^2+7^2}=25$. Además, $\vec{v_3}=25\cdot(12,-10)-(7,-24)=(293,-226)//$ Luego, $\vec{v_1}\cdot\vec{v_3}=(7,-24)\cdot(293,-226)=2051+5424=7475$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá el plano de ecuación $\Pi: 2x-14y-4z=5$ e indicá la única opción que muestra la distancia de Π al origen de coordenadas.

A) $\sqrt{6}$

B) $\dfrac{5}{36}$

C) $\dfrac{5\sqrt{6}}{36}$

D) $6\sqrt{6}$

Opción correcta: C)

Resolución

Para calcular la distancia entre el punto $(0,0,0)$ y Π, hay que primero hallar el punto del plano más cercano al $(0,0,0)$ y eso se consigue calculando la intersección del plano con la recta de dirección $\vec{N}$ y que pasa por el origen de coordenadas. La intersección entre recta y plano nos da el punto $Q=\left(\frac{5}{108},-\frac{35}{108},-\frac{5}{54}\right)$. Finalmente, la distancia de Q al origen de coordenadas es $\frac{5\sqrt{6}}{36}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

  Indicá cuál de las siguientes opciones muestra la forma implícita y vectorial del mismo plano.

  A) $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ y $(x_1, x_2, x_3) = \alpha(-1, 2, 0) + \beta(-1, -1, 3) + (0, 1, -1); \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

  B) $6x_1 = 0$ y $(x_1, x_2, x_3) = \alpha(-1, 2, 0) + \beta(-1, -1, 3) + (-2, 0, 0); \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

  C) $6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0$ y $(x_1, x_2, x_3) = \alpha(-1, 2, 0) + \beta(-1, -1, 3) + (1, -1, 0); \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

  D) $6x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0$ y $(x_1, x_2, x_3) = \alpha(-1, 2, 0) + \beta(-1, -1, 3) + (1, -1, 1); \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Opción correcta: A)

Resolución

El producto vectorial entre los vectores $(-1, 2, 0)$ y $(-1, -1, 3)$ nos da $(6, 3, 3)$ por lo que la segunda opción y la cuarta opción quedan descartadas, pues las ecuaciones implícitas allí presentadas no indican un vector normal múltiplo de $(6, 3, 3)$, algo que sí se cumple para las dos restantes. Sin embargo, solo una de las dos opciones que restan es la correcta, para averiguar de cuál se trata, podemos comprobar si el punto de paso de cada plano cumple efectivamente la ecuación implícita correspondiente. Esto solo ocurre en la opción A). Estos contenidos los encontrás en la sesión 2.