PUNTAJE	1) 2 puntos	2) a) 1 punto b) 1 punto	3) 2,5 puntos	4 al 10) 0,5 cada uno

1) Dadas las matrices es $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

Hallar la matriz $M = A\cdot A^T + B\cdot B^T$ ***, dónde*** A^T ***y*** B^T ***representan las matrices A y B traspuestas***

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \rightarrow A^T=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\rightarrow B^T=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$$

Calculamos los productos pedidos para poder hallar la matriz M

$$A\cdot A^T = \cdot\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$B\cdot B^T=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$M = A\cdot A^T + B\cdot B^T=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}}$$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 6 para revisar el tema Operaciones con matrices

2) Sean las rectas de ecuación r: $(x;y;z)=\lambda(1;-2;-5)+(1;-1;2)$, $s:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1/3}$ *y el punto*

$P=(1;1;1)$

a) Estudiar si las rectas r y s son paralelas o perpendiculares.

Para determinar si las rectas son paralelas o perpendiculares necesitamos los vectores directores de cada una de ellas

$$r:(x;y;z)=\lambda(1;-2;-5)+(1;-1;2)\rightarrow\overrightarrow{v_r}=(1;-2;-5)$$

$$s:\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1/3}\rightarrow\overrightarrow{v_s}=\left(-1;1;\frac{1}{3}\right)$$

Analicemos si los vectores directores son paralelos, para ello aplicamos la definición que establece que serán paralelos si se cumple que son proporcionales es decir si se cumple que

$$\boxed{\overrightarrow{v_s}=k\overrightarrow{v_r}}\quad o\quad\boxed{\frac{v_{sx}}{v_{rx}}=\frac{v_{sy}}{v_{ry}}=\frac{v_{sz}}{v_{rz}}=k}\rightarrow\frac{-1}{1}\neq\frac{1}{-2}\neq\frac{1/3}{5}\rightarrow\overrightarrow{v_s}\nparallel\overrightarrow{v_r}\rightarrow\boxed{s\nparallel r}$$

Hemos determinado que las rectas no son paralelas, debemos analizar si son perpendiculares, para ello el producto escalar de sus vectores directores debe ser 0

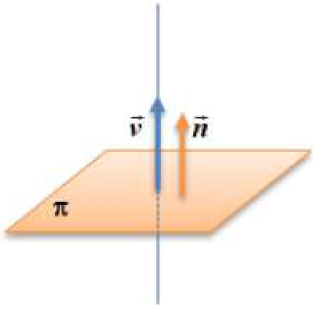
$$\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}=(1;-2;-5)\cdot\left(-1;1;\frac{1}{3}\right)=1\cdot(-1)+(-2)\cdot1+(-5)\cdot\frac{1}{3}=-\frac{14}{3}\neq0$$

$$\rightarrow\overrightarrow{v_r}\not\perp\overrightarrow{v_s}\rightarrow\boxed{r\not\perp s}$$ ***Conclusión, las rectas no son ni paralelas ni perpendiculares.***

Recomendación: Puedes rever el tema Condición de paralelismo y perpendicularidad de vectores en la Unidad 1

b) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto P

Para hallar la ecuación del plano necesitamos conocer un punto del plano y su vector normal, el dato dado es que el plano es perpendicular a la recta s, entonces el vector normal del plano coincide con el vector director de la recta



Datos para hallar el plano

$$\pi : \begin{cases} P_0 = (1;1;1) \\ \vec{n} = (-1;1;\frac{1}{3}) \end{cases}$$

$\boxed{\pi = \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0}$ ***Ecuación del plano***

Calculamos el vector $\overrightarrow{P_0P}$

$$\overrightarrow{P_0P} = (x;y;z) - (1;1;1) = (x-1;y-1;z-1)$$

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow (x-1;y-1;z-1) \cdot (-1;1;\frac{1}{3}) = 0$$

$$\pi : (-1)(x-1) + 1(y-1) + \frac{1}{3}(z-1) = 0$$

$$\pi : -x + 1 + y - 1 + \frac{1}{3}z - \frac{1}{3} = 0 \rightarrow \boxed{\pi : -x + y + \frac{1}{3}z - \frac{1}{3} = 0}$$

Recomendación: Puedes rever el tema Ecuación de un plano en la Unidad 1

3) Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} kx+2y-z=k \\ 2x+ky+\ \ z=2+k \\ x-ky+2z=2k \end{cases}$$

Determinar los valores $k\in\Re$ ***, para que el sistema admita solución única, infinitas soluciones y no admita solución.***

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} kx+2y-z=k \\ 2x+ky+\ \ z=2+k \\ x-ky+2z=2k \end{cases} \to \begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & -k & 2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} k & 1 \\ -k & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -k \end{vmatrix} = 3k^2-6-(-3k)=3k^2+3k-6$$

Buscamos los valores que anulan el determinante de A

$$3k^2+3k-6=0 \to k^2+k-2=0 \to \boxed{k=-2 \vee k=1}$$

A partir de estos valores se analiza el sistema reemplazando en la matriz ampliada por cada uno de ellos.

1) ***Si*** $k\neq -2 \ \wedge \ k\neq 1 \to SCD$

2) ***Evaluamos el sistema en*** $k=1$***, en este caso la matriz ampliada del sistema es***

$$\begin{cases} kx+2y-z=k \\ 2x+ky+\ \ z=2+k \\ x-ky+2z=2k \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to r(A)=r(A')=2<3 \therefore SCI$$

3) ***Evaluamos el sistema en*** $k=-2$***, en este caso la matriz ampliada del sistema es:***

$$\begin{cases} kx+2y-z=k \\ 2x+ky+\ \ z=2+k \\ x-ky+2z=2k \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & -4 \end{array}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & -2 & 0 & \frac{4}{3} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -\frac{8}{3} \\ \boxed{1} & -2 & 0 & \frac{4}{3} \end{array}\right) \to r(A)\neq r(A') \therefore SI \qquad \to \boxed{\begin{array}{l} SCD:\Re-\{1,-2\} \\ SCI: k=1 \\ SI:\quad k=-2 \end{array}}$$

Recomendación: Puedes rever las tutorías en línea 27 y 29 para revisar el tema análisis de un sistema de ecuaciones en función de un parámetro

4) *Siendo las matrices* $A=\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ *y* $C=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$ *la matriz X que satisface que* $AX-CX=B$ *es:*

- ☐ *a)* $X=\begin{pmatrix}0&1\\-1/2&1/2\end{pmatrix}$
- ☐ *b)* $X=\begin{pmatrix}11/2&2\\-3&-1\end{pmatrix}$
- ☐ *c)* $X=\begin{pmatrix}5&-2\\3/2&-1/2\end{pmatrix}$
- ☐ *d)* $X=\begin{pmatrix}3/2&1\\-2&-1\end{pmatrix}$

Recomendación: Puedes rever las tutorías en línea 18 y 19 para revisar el tema ecuaciones matriciales

5) *Para qué valores del parámetro* $m\in\Re$, *el rango de la matriz es 3, siendo* $M=\begin{pmatrix}m&0&2\\-2&4&m\\0&1&-1\end{pmatrix}$

- ☐ *a)* $\forall m\neq-2\ r(A)=3$
- ☐ *b)* $\forall m\in\Re\ r(A)=3$
- ☐ *c)* $\nexists m\in\Re / r(A)=3$
- ☐ *d)* *Si* $m=-2, r(A)=3$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 15 para revisar el tema rango de una matriz

6) *Sabiendo que* $|M|=\begin{vmatrix}m&n&p\\-1&1&0\\2&2&2\end{vmatrix}=3$, *entonces el determinante* $|N|=\begin{vmatrix}4&-4&0\\m&n&p\\8-3m&8-3n&8-3p\end{vmatrix}$ *es:*

- ☐ *a)* $|N|=48$
- ☐ *b)* $|B|=-12$
- ☐ *c)* $|N|=-48$
- ☐ *d)* $|B|=12$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 14 para revisar el tema propiedades de los determinantes

7) *El conjunto de valores de* $a\in\Re$ *tales que la matriz A es no singular siendo* $A=\begin{pmatrix}a&1&0\\0&1&1\\1&a&0\end{pmatrix}$ *es:*

- ☐ *a)* $\{-1,1\}$
- ☐ *b)* $\Re-\{-1,1\}$
- ☐ *c)* $\varnothing$
- ☐ *d)* $\Re$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 21 para revisar el tema matriz inversa.

8) *El o los valores de* $x \in \Re$ *que verifican la ecuación* $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = 10$

- ☐ *a)* $x = \pm\sqrt{2}$
- ☐ *b)* $\forall x \in \Re$
- ☐ *c)* $x = 0 \vee x = \sqrt{2}$
- ☐ *d)* $\nexists x \in \Re$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 13 para revisar el tema cálculo de determinantes

9) *Sea el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y + 4z = -1 \\ -2x + 4y - 8z = 2 \end{cases}$ *entonces el conjunto solución del sistema es:*

- ☐ *a)* $\varnothing$
- ☐ *b)* $\{(0;0;0)\}$
- ☐ *c)* $\{(1-2z;1+z;z), con\ z \in \Re\}$
- ☐ *d)* $\{(-2z;z;z), con\ z \in \Re\}$

Recomendación: Puedes rever las tutorías en línea 25 y 26 para revisar el tema resolución de sistemas de ecuaciones lineales compatibles indeterminados

10) *En una economía hipotética de dos industrias A y B la matriz de los coeficientes tecnológicos es* $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Si el vector demanda final es $\mathrm{DF} = \begin{pmatrix} 60 \\ 12 \end{pmatrix}$ *, entonces el vector producción es:*

- ☐ *a)* $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \end{pmatrix}$
- ☐ *b)* $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 210 \\ 180 \end{pmatrix}$
- ☐ *c)* $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 180 \\ 210 \end{pmatrix}$
- ☐ *d)* $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 90 \\ 105 \end{pmatrix}$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 16 para revisar el tema Matriz de Insumo Producto