UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 06/11/24 - Tema 3

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considerá $z \in \mathbb{C}$ tal que cumple la ecuación $\dfrac{z + 2\overline{z} + 1}{2Re(z)} = 3i$. Indicá la única opción verdadera.

A) La parte real de z es un número positivo.

B) z se ubica en el segundo cuadrante.

C) z tiene parte imaginaria nula.

D) z se ubica en el tercer cuadrante.

Opción correcta: B)

Resolución

Escribiendo al número complejo z en su forma binómica como $z = a+bi$, realizando las operaciones y reagrupando parte real y parte imaginaria se puede llegar a la igualdad: $(3a+1)+(-b-6a)i = 0$. Desde aquí, se deduce que $a = -\frac{1}{3}$ y $b = 2$; por lo que $z = -\frac{1}{3} + 2i$ es la solución de la ecuación dada; y, la única opción verdadera es la segunda. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Indicá la opción que muestra el módulo y argumento del número complejo

$$z = \frac{i^6 \cdot (3-3i)^5}{Re(-9+i) \cdot (9-9i)}$$

A) $|z| = 12$ y $arg(z) = \pi$

B) $|z| = 12$ y $arg(z) = \frac{\pi}{2}$

C) $|z| = 24$ y $arg(z) = \pi$

D) $|z| = \frac{1}{81}$ y $arg(z) = \pi$

Opción correcta: A)

Resolución

Para hallar el $|z|$ se puede usar las propiedades de los módulos para plantear y resolver el siguiente cálculo: $\dfrac{|i|^6 \cdot |3-3i|^5}{|-9| \cdot |9-9i|} = 12$. Y, para averiguar el argumento de z, usamos el Teorema de De Moivre para deducir que, como $[arg(i^6) + 5arg(3-3i)] - [arg(-9) + arg(9-9i)] = 7\pi$, el argumento de z será π Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) = x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 16x^2 - 5x + 20$. Si $-i$ es raiz de P, elegí la opción que muestra su factorización en $\mathbb{C}$.

A) $(x-4)(x^2+5)(x^2+1)$

B) $(x-4)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x-i)(x+i)$

C) $(x-4)(x^2-5)(x-i)(x+i)$

D) $(x-4)(x-\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x^2+1)$

Opción correcta: B)

Resolución

Como $-i$ es raiz de P también es raiz i. Luego $(x-i)(x+i) = x^2+1$ divide a P. Entonces $P(x) = x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 16x^2 - 5x + 20 = (x^3 - 4x^2 - 5x + 20)(x-i)(x+i)$. Por el lema de Gauss se obtiene que $x = 4$ es raiz de P. Luego: $P(x) = (x^2-5)(x-4)(x-i)(x+i)$. De esta última expresión se obtiene la factorización buscada sabiendo que $x = \sqrt{5}$ y $x = -\sqrt{5}$ también son raíces de P. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

  Elegí la opción que muestra los polinomios cociente y resto que resultan de dividir $P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x - 9$ por $Q(x) = x^2 - 2x + 5$.

  A) Cociente: $x^3 - x^2 - 5x - 5$. Resto: $16x + 16$

  B) Cociente: $x^3 - x^2 - 5x - 5$. Resto: $-16x - 16$

  C) Cociente: $x^3 + x^2 + 5x + 5$. Resto: $x^2 - 2x + 5$

  D) Cociente: $16x + 16$. Resto: $x^3 - x^2 - 5x - 5$

  Opción correcta: A)

  Resolución

  El cociente y el resto de dividir P por Q se obtienen por medio del algoritmo de la división. En particular, se puede comprobar que $(x^3-x^2-5x-5)(x^2-2x+5)+(16x+16) = x^5-3x^4+2x^3+x-9$

  Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

  Elegí la única opción que muestra el conjunto solución del siguiente sistema no homogéneo:

  $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ -3x_1 + 3x_3 - 3x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 2 \end{cases}$$

  A) $\{(0; -1; 1; 1)\}$

  B) $\left\{(0; -1; 1; 1) + \alpha\left(\frac{1}{4}; 5; -\frac{3}{4}; 0\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

  C) $\left\{\left(\frac{1}{4}; 5; -\frac{3}{4}; 0\right)\right\}$

  D) $\left\{\left(\frac{1}{4}; 5; -\frac{3}{4}; 0\right) + \alpha(0; -1; 1; 1), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

  Opción correcta: D)

  Resolución

  Si escribís el sistema y lo triangulás, obtenés la solución propuesta. Un posible recorrido es:

  $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & 5 & -4 & 2 \end{array}\right) \times(3) \quad \underset{F_2-(-3)\cdot F_1 \to F_2}{\sim} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 12 & -9 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & -4 & 2 \end{array}\right) \times(-3) \quad \underset{F_3-3\cdot F_1 \to F_3}{\sim}$$

  $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 12 & -9 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & -7 \end{array}\right) \times\left(\frac{2}{3}\right) \quad \underset{F_3-\left(\frac{-2}{3}\right)\cdot F_2 \to F_3}{\sim} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 12 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -3 \end{array}\right)$$

  De la matriz triangulada, podés escribir el sistema:

  $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3\cdot x_3 - 2\cdot x_4 = 3 \\ 3\cdot x_2 + 12\cdot x_3 - 9\cdot x_4 = 6 \\ 4\cdot x_3 - 4\cdot x_4 = -3 \end{cases}$$

  Y despejar todo en función de x_4. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

  A, B, C son matrices de 3×3 tales que: $det(B) = 9$, $A = 4B + BC$ y $C = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

  Elegí la única opción que muestra el determinante de la matriz A.

  A) 86

  B) 34

  C) 774

  D) 342

  Opción correcta: C)

  Resolución

  Como la matriz B es un factor común en la igualdad $A = 4B + BC$, podés expresar dicha matriz como $A = B(4 \cdot I + C)$. Y, luego, aplicando las propiedades de los determinantes, podés calcular: $\det(A) = \det(B) \cdot \det(4 \cdot I + C) = 774$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 10.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

  Indicá cuál es la fórmula de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que tiene $\mathrm{Im}(T) = \langle(1,0,1)\rangle$ y $\mathrm{Nu}(T) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 - 3x_1 = 0\}$.

  A) $T(x_1, x_2) = (x_2 + 3x_1, 0, x_2 - 3x_1)$

  B) $T(x_1, x_2) = (x_2 - 3x_1, 0, x_2 + 3x_1)$

  C) $T(x_1, x_2) = (x_2 - 3x_1, 0, x_2 - 3x_1)$

  D) $T(x_1, x_2) = (x_2 - 3x_1, x_2 - 3x_1)$

  Opción correcta: C)

  Resolución

  Como tenemos que $\mathrm{Nu}(T) = \langle(1,3)\rangle$ entonces $T(1,3) = (0,0,0)$ y podemos hacer $T(0,1) = (1,0,1)$ entonces haciendo $(x_1, x_2) = \alpha(1,3) + \beta(0,1)$ tenemos que $\alpha = x_1$ y $\beta = x_2 - 3x_1$ de donde obtenemos $T(x_1, x_2) = (x_2 - 3x_1, 0, x_2 - 3x_1)$. Estos contenidos los encontrás en la sesión 11.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

  Considerá las transformaciones del plano T y T' que verifican las siguiente condiciones: T es una traslación, T' es una homotecia de factor $k \in \mathbb{R}_{>1}$, al aplicar $T \circ T'$ el círculo de centro (0,0) y radio 1 es transformado en el círculo de centro (1,1) y radio 2. Indicá cuál es el valor de k para el cual se verifican todas las condiciones mencionadas.

  A) $k = 0$ B) $k = 1$ C) $k = 2$ D) $k = 3$

  Opción correcta: C)

  Resolución

  Dado que una traslación no modifica el radio de un círculo este debe ser modificado por la homotecia, y como el radio se ve multiplicado por 2 este debe ser el valor de k. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.
