ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) -Cátedra Cabana
Primer Parcial 26/09/2023 - Turno 3 - Tema 5

1. Sea la función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - \sqrt{x^4 + 3x^2}$

   (2 puntos) Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ....$-\dfrac{3}{2}$.......................

   Resolución:

   Como tenemos una indeterminación de la forma $\infty - \infty$ multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 - \sqrt{x^4 + 3x^2})(x^2 + \sqrt{x^4 + 3x^2})}{x^2 + \sqrt{x^4 + 3x^2}} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - x^4 - 3x^2}{x^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}\right)} = -\frac{3}{2}$$

2. Sea la función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{6x}{4x^2 + 1}$ entonces:

   a) (1 punto)
   - ■ $y = 0$ es asíntota horizontal
   - □ $x = 0$ es asíntota vertical
   - □ f no tiene asíntotas
   - □ $y = \dfrac{3}{8}x$ es asíntota oblicua

   b) (1 punto)
   - □ f decrece en $\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$
   - □ f crece en $\left(\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$
   - □ f decrece en $(-\infty; 0)$
   - ■ f crece en $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$

   c) (1 punto)
   - □ en $x = 0$ hay un mínimo
   - □ en $x = \dfrac{1}{4}$ hay un máximo
   - ■ en $x = -\dfrac{1}{2}$ hay un mínimo
   - □ en $x = \dfrac{3}{2}$ hay un máximo

   d) (1 punto) La imagen de f es:
   - □ $\mathbb{R}$
   - ■ $\left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$
   - □ $(-\infty; 1]$
   - □ $\left[\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$

Resolución:

$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ entonces $y = 0$ es una AH

$f'(x) = \dfrac{6(4x^2+1) - 6x \cdot 8x}{(4x^2+1)^2} = \dfrac{-24x^2+6}{(4x^2+1)^2}$

así que $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ o $x = \frac{1}{2}$.

Si $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$, $f'(x) < 0 \longrightarrow f$ decrece

Si $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $f'(x) > 0 \longrightarrow f$ crece

Si $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$, $f'(x) < 0 \longrightarrow f$ decrece

de dónde se deduce que en $x = -\dfrac{1}{2}$ se realiza un mínimo y en $x = \dfrac{1}{2}$ un máximo.

$\mathrm{Im}(f) = [f(-1/2), f(1/2)] = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

3. La ecuación de recta tangente al gráfico de la función h en el punto $x = -1$ es $y = 4x+7$. Sea $g(x) = h(x^3 + x - 3)$.

   a) (1/2 punto) Calcular $g(1)$: ....3..........................

   b) (1/2 punto) Calcular $g'(1)$: ....16........................

   c) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de g en $x = 1$:

   ....$y = 16x - 13$..

Resolución: $g(1) = h(-1) = 3$ usando la recta tangente a h en $x = -1$

$$g'(x) = h'(x^3 + x - 3) \cdot (3x^2 + 1)$$

$$g'(1) = h'(-1) \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16$$

($h'(-1) = 4$ por ser la pendiente de la recta tangente)

$y = 16x - 13$ es la recta tangente al gráfico de g en $x = 1$ que pasa por el punto $(1, 3)$

4. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} & x \neq 0 \\ \\ 2k - 1 & x = 0 \end{cases}$

   a) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$............$\dfrac{1}{2}$...............................

   b) (1 punto) Determinar $k \in \mathbb{R}$ tal que la función f sea continua en $x = 0$:

   ....$k = \dfrac{3}{4}$............

Resolución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

(al ser una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces)

Para que f sea continua, $f(0) = 2k - 1 = \dfrac{1}{2}$. Por lo tanto, $k = \dfrac{3}{4}$.