ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) -Cátedra Cabana
Primer Parcial 23/09/2024 - Turno 1 - Tema 1

1. Determinar las ecuaciones de todas las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{5x^3+15x^2}{x^2-9}$

   a) (1 punto) Asíntotas verticales............... ....$x=3$ (horizontal no tiene)

   b) (1punto) Asíntotas horizontales y/o oblicuas................ ....$y=5x+15$

   Resolución:

   AV: analizamos su existencia en los puntos $x=-3$ y $x=3$.

   $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^3+15x^2}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\infty$ por lo tanto $x=3$ es AV.

   $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5x^3+15x^2}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5x^2(x+3)}{(x-3)(x+3)}=-\dfrac{15}{2}$ por lo tanto $x=-3$ no es AV.

   AH: Calcular (puede ser por L'Hopital) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ no hay AH.

   AO: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+15x^2}{(x^2-9)x}=5$ y $b=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+15x^2}{x^2-9}-5x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^2+45x}{(x^2-9)}=15$ por lo tanto $y=5x+15$ es AO.

2. (1 punto) Dada $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\,\text{sen}^2(a\,x)}{x^2} & x\neq 0\\ \\ 64 & x=0\end{cases}$.

   Determinar, si existe, el valor de $a\in\mathbb{R}$ para que f sea continua en $x=0$

   $a=$...........4..................................

   Resolución:

   $f(0)=64$ y $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\,\text{sen}^2(a\,x)}{x^2}=a^3$ (este límite se puede resolver utilizando LH o modificando la expresión)

   Por lo tanto $a=4$ para que la función resulte continua.

3. (1 punto) Sea f derivable en $x=1$ de manera tal que $y=4x-2$ es la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(1,f(1))$.

   Si $h(x)=\ln(f(x))+e^{\text{sen}(x-1)}$, hallar $h'(1)=$........... .3...........

   Resolución:

   $h'(x)=\dfrac{1}{f(x)}f'(x)+e^{\text{sen}(x-1)}\cos(x-1)$

   $h'(1)=\dfrac{1}{f(1)}f'(1)+e^{\text{sen}(1-1)}\cos(1-1)=\dfrac{1}{f(1)}f'(1)+1.$

   Como $y=4x-2$ es la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(1,f(1))$, tenemos $f'(1)=4$ y $f(1)=4\cdot 1-2=2$.

   Reemplazando en $h'(1)=\dfrac{1}{f(1)}f'(1)+1=3.$

4. (2 puntos) Sea $f(x)=\begin{cases}\dfrac{sen^2(x)}{2x} & x\neq 0\\ \\ 0 & x=0\end{cases}$

   Hallar, si existe, $f'(0)=$.............$\dfrac{1}{2}$...........

Resolución:

Observar que f es continua en $x=0$. Se analiza el cociente incremental:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{sen^2(h)}{2h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen^2(h)}{2h^2}=\frac{1}{2}$$

Así $f'(0)=\dfrac{1}{2}$

5. Dada $f(x)=(x^2-24)e^{x+7}$

   a) (1 punto) sobre las asíntotas

      ☐ $x=\sqrt{24}$ es asíntota vertical

      ■ $y=0$ es asíntota horizontal

      ☐ no tiene asíntotas

      ☐ $y=x$ es asíntota oblicua

   b) (1 punto)

      ■ f crece en $(-\infty;\,-6)$

      ☐ f crece en $(-6;\,4)$

      ☐ f decrece en $(0;\,+\infty)$

      ☐ f decrece en $(-\infty;\,4)$

   c) (1 punto)

      ☐ en $x=4$ hay un máximo relativo de f

      ☐ en $x=0$ hay un mínimo relativo de f

      ☐ en $x=-4$ hay un mínimo relativo de f

      ■ en $x=-6$ hay un máximo relativo de f

   d) (1 punto) La imagen de f es: ......$[f(4);\,+\infty)$......

Resolución:

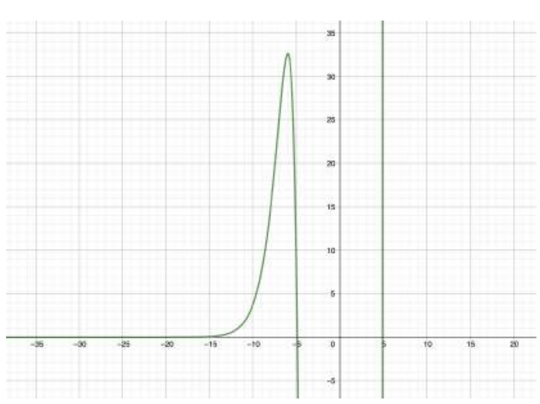
$Dom\ f:\ \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ por lo tanto $y=0$ es AH (no tiene AO)

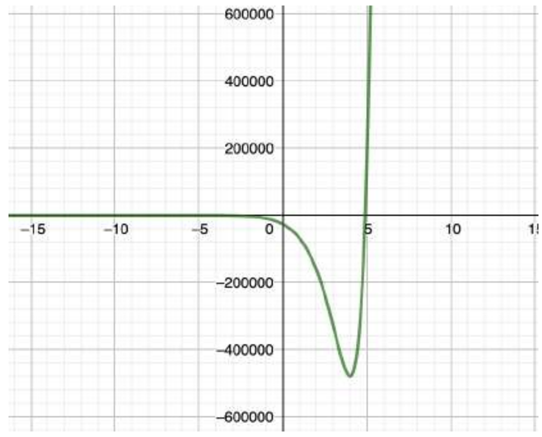
$f'(x)=2xe^{x+7}+(x^2-24)e^{x+7}=e^{x+7}(x^2+2x-24)=0 \iff x=-6$ *o* $x=4$ (puntos críticos)

f crece en $(-\infty;\,-6)$ y en $(4;\,-\infty)$

f decrece en $(-6;\,4)$



Cambiamos la escala del eje y para visualizar el mínimo en $f(4)$ y la imagen de la función.:


600000
400000
200000
−15
−10
−5
0
5
10
−200000
−400000
−600000