ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) -Cátedra Cabana

PRIMER PARCIAL 23/09/2024 - TEMA 2

1. Determinar las ecuaciones de todas las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{6x^3 + 18x^2}{x^2 - 9}$

   a) (1 punto) Asíntotas verticales......................$x = 3$

   b) (1punto) Asíntotas horizontales y/o oblicuas ....$y = 6x + 18$

   Resolución:

   $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{6x^3 + 18x^2}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{6x^2(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \infty$ por lo tanto $x = 3$ es AV.

   $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{6x^3 + 18x^2}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{6x^2(x+3)}{(x-3)(x+3)} = -9$ por lo tanto $x = -3$ no es AV.

   Como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ no hay AH.

   AO: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^3 + 18x^2}{(x^2 - 9)x} = 6$ y $b = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^3 + 18x^2}{x^2 - 9} - 6x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{18x^2 + 54x}{x^2 - 9} = 18$. Por lo tanto $y = 6x + 18$ es AO.

2. (1 punto) Dada $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\,\operatorname{sen}^2(a\,x)}{x^2} & x \neq 0 \\ \\ -8 & x = 0 \end{cases}$.

   Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua en $x = 0$

   $a =$...........-2.................................

   Resolución:

   $f(0) = -8$ y $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a\,\operatorname{sen}^2(a\,x)}{x^2} = a^3$ (este límite se puede resolver utilizando LH o modificando la expresión)

   Por lo tanto $a = -2$ para que la función resulte continua.

3. (1 punto) Sea f derivable en $x = 1$ de manera tal que $y = 8x - 6$ es la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(1, f(1))$.

   Si $h(x) = \ln(f(x)) + e^{\operatorname{sen}(x-1)}$, hallar $h'(1) =$...........5..........

Resolución:

$h'(x) = \dfrac{1}{f(x)} f'(x) + e^{\operatorname{sen}(x-1)} cos(x-1)$

$h'(1) = \dfrac{1}{f(1)} f'(1) + e^{\operatorname{sen}(1-1)} cos(1-1) = \dfrac{1}{f(1)} f'(1) + 1$

como $y = 8x - 6$ es la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(1, f(1))$

tenemos $f'(1) = 8$ y $f(1) = 8 \cdot 1 - 6 = 2$.

Reemplazando en $h'(1) = \dfrac{1}{f(1)} f'(1) + 1 = 5$

4. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen^2(x)}{3x} & x \neq 0 \\ \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Hallar, si existe, $f'(0) =$........$\dfrac{1}{3}$..................

Resolución:

Observar que f es continua en $x = 0$. Se analiza el cociente incremental:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2(h)}{3h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{sen^2(h)}{3h^2} = \frac{1}{3}$$

Así $f'(0) = \dfrac{1}{3}$

5. Dada $f(x) = (x^2 - 24)e^{x+7}$

   a) (1 punto) sobre las asíntotas

   - ☐ no tiene asíntotas
   - ☐ $y = x$ es asíntota oblicua
   - ☐ $x = \sqrt{24}$ es asíntota vertical
   - ■ $y = 0$ es asíntota horizontal

   b) (1 punto)

   - ■ f crece en $(-\infty; -6)$

- ☐ f decrece en $(-\infty;\ 4)$
- ☐ f crece en $(-6;\ 4)$
- ☐ f decrece en $(0;\ +\infty)$

c) (1 punto)

- ■ en $x = -6$ hay un máximo relativo de f
- ☐ en $x = 4$ hay un máximo relativo de f
- ☐ en $x = 0$ hay un mínimo relativo de f
- ☐ en $x = -4$ hay un mínimo relativo de f

d) (1 punto) La imagen de f es:........$[f(4);\ +\infty)$.......

Resolución:

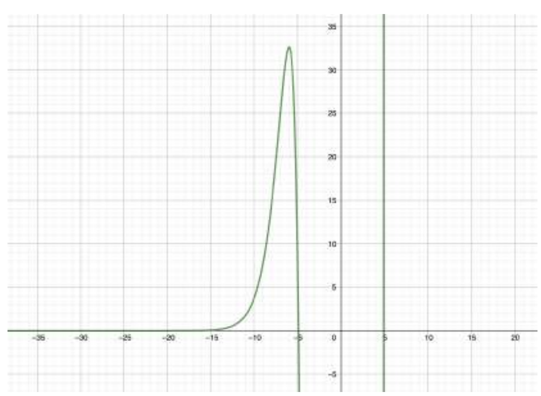
$Dom\ f:\ \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ por lo tanto $y = 0$ es AH (no tiene AO)

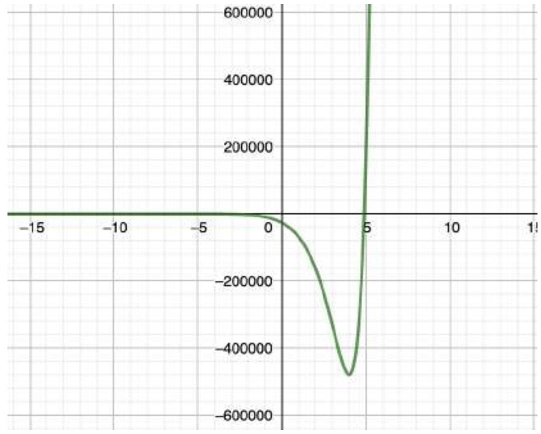
$f'(x) = 2xe^{x+7} + (x^2 - 24)e^{x+7} = e^{x+7}(x^2 + 2x - 24) = 0 \iff x = -6\ o\ x = 4$ (puntos críticos)

f crece en $(-\infty;\ -6)$ y en $(4;\ -\infty)$

f decrece en $(-6;\ 4)$



Cambiamos la escala del eje y para visualizar el mínimo en $f(4)$ y la imagen de la función.:


600000
400000
200000
-200000
-400000
-600000
-15
-10
-5
0
5
10