

1. Sea la función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - \sqrt{x^4 + 6x^2}$

(2 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots -3 \dots\dots\dots$

Resolución:

Como tenemos una indeterminación de la forma $\infty - \infty$ multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - \sqrt{x^4 + 6x^2})(x^2 + \sqrt{x^4 + 6x^2})}{x^2 + \sqrt{x^4 + 6x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^4 - 6x^2}{x^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{6}{x^2}}\right)} = -3 \end{aligned}$$

2. Sea la función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{6x}{4x^2 + 1}$ entonces:

a) (1 punto)

- f no tiene asíntotas
- $y = \frac{3}{8}x$ es asíntota oblicua
- $y = 0$ es asíntota horizontal
- $x = 0$ es asíntota vertical

b) (1 punto)

- f crece en $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$
- f decrece en $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$
- f crece en $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$
- f decrece en $(-\infty; 0)$

c) (1 punto)

- en $x = -\frac{1}{2}$ hay un mínimo
- en $x = \frac{3}{2}$ hay un máximo
- en $x = 0$ hay un mínimo
- en $x = \frac{1}{4}$ hay un máximo

d) (1 punto) La imagen de f es:

- \mathbb{R}
- $(-\infty; 1]$
- $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$
- $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$

Resolución:

$$\text{Dom} f = \mathbb{R}$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ entonces $y = 0$ es una AH

$$f'(x) = \frac{6(4x^2 + 1) - 6x \cdot 8x}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{-24x^2 + 6}{(4x^2 + 1)^2}$$

así que $f'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$ o $x = \frac{1}{2}$.

Si $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$, $f'(x) < 0 \rightarrow f$ decrece

Si $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $f'(x) > 0 \rightarrow f$ crece

Si $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f$ decrece

de dónde se deduce que en $x = -\frac{1}{2}$ se realiza un mínimo y en $x = \frac{1}{2}$ un máximo.

$$\text{Im}(f) = [f(-1/2), f(1/2)] = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}].$$

3. La ecuación de recta tangente al gráfico de la función h en el punto $x = -1$ es $y = 2x + 6$.
Sea $g(x) = h(x^3 + x - 3)$.

a) (1/2 punto) Calcular $g(1)$:4.....

b) (1/2 punto) Calcular $g'(1)$:8.....

c) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de g en $x = 1$:

..... $y = 8x - 4$

Resolución: $g(1) = h(-1) = 4$ usando la recta tangente a h en $x = -1$

$$g'(x) = h'(x^3 + x - 3) \cdot (3x^2 + 1)$$

$$g'(1) = h'(-1) \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8$$

($h'(-1) = 2$ por ser la pendiente de la recta tangente)

$y = 8x - 4$ es la recta tangente al gráfico de g en $x = 1$ que pasa por el punto $(1, 4)$

4. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} & x \neq 0 \\ 3k + 1 & x = 0 \end{cases}$

a) (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots\dots\dots \frac{1}{2} \dots\dots\dots$

b) (1 punto) Determinar $k \in \mathbb{R}$ tal que la función f sea continua en $x = 0$:

..... $k = -\frac{1}{6}$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

(al ser una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces)

Para que f sea continua, $f(0) = 3k + 1 = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, $k = -\frac{1}{6}$.