ANÁLISIS MATEMÁTICO A (INGENIERIA Y CS. EXACTAS)(66) -Cátedra Cabana

PRIMER PARCIAL 23/09/2024 - TEMA 4

1. (1 punto) Determinar el valor de la expresión $\frac{b}{a}$ sabiendo que $\lim_{x\to -1} \frac{a\ \ln(2+x)}{\operatorname{sen}(\ln(2+x)^b)} = -3$

   $\frac{b}{a}$ =.........$-\frac{1}{3}$...

   Resolución:

   $\lim_{x\to -1} \frac{a\ \ln(2+x)}{\operatorname{sen}(\ln(2+x)^b)} = \lim_{x\to -1} \frac{a\ \ln(2+x)}{\operatorname{sen}(b\ \ln(2+x))} \underset{LH}{=} \lim_{x\to -1} \frac{a}{\cos(b\ \ln(2+x))\, b} = \frac{a}{b} = -3$ por lo tanto $\frac{b}{a} = -\frac{1}{3}$

2. (2 puntos) Dada $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - 1 & x \geq 1 \\ 5a\ \operatorname{sen}(x-1) & x < 1 \end{cases}$

   Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que g sea derivable en $x = 1$

   a =......$\frac{1}{10}$...................

   Resolución:

   $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{5a\ \operatorname{sen}(1+h-1) - 0}{h} = 5a$

   $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{1+h} - 1 - 0}{h} = \frac{1}{2}$ (se puede calcular este límite multiplicando y dividiendo por la expresión $(\sqrt{h+1} + 1)$)

   debe ser $5a = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad a = \frac{1}{10}$

3. (1 punto) Sea $f(x) = e^{(x^2-4)} + 2\cos(x-2)$.

   La ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x = 2$ es:

   ....$y = 4x - 5$................

   Resolución:

   $f(2) = e^{(2^2-4)} + 2\cos(2-2) = e^0 + 2 = 3$ así que la recta pasa por el punto $(2,\ 3)$

   Derivamos para calcular la pendiente:

$f'(x) = e^{(x^2-4)}2x - 2sen(x-2)$ entonces $m = f'(2) = 4$

la ecuación de la recta tangente: $y = mx + b$: $3 = 4 \cdot 2 + b \qquad \Longrightarrow b = -5$

de donde: $y = 4x - 5$

4. (2 puntos) Dadas las funciones $f(x) = 6x^2 \ln(\frac{x}{5})$ y $g(x) = 3x^2$, hallar $x_0 > 0$ tal que las rectas tangentes a los gráficos de f y g sean paralelas en $x = x_0$.

   $x_0 =$........5.....

   Resolución:

   Se calculan las derivadas de ambas funciones

   $f'(x) = 12x \ln(\frac{x}{5}) + 6x, \qquad g'(x) = 6x$

   se buscan los puntos donde ambas sean iguales ya que las rectas tangentes se quieren paralelas (misma pendiente)

   $12x \ln(\frac{x}{5}) + 6x = 6x \quad \longrightarrow \quad x = 0$ (se descarta) o $x = 5$, por lo tanto $x_0 = 5$

5. Sea la función $f(x) = \dfrac{6x}{16x^2 + 1}$

   a) (1 punto) sobre las asíntotas

   ☐ no tiene asíntotas

   ☐ $x = 0$ es asíntota horizontal

   ■ $y = 0$ es asíntota horizontal

   ☐ $y = x$ es asíntota oblicua

   b) (1 punto)

   ☐ f crece en $\left(-\frac{1}{4};\ 4\right)$

   ☐ f decrece en $(0;\ +\infty)$

   ☐ f decrece en $\left(-\infty;\ \frac{1}{4}\right)$

   ■ f decrece en $\left(-\infty;\ -\frac{1}{4}\right)$

   c) (1 punto)

- ☐ en $x = \frac{1}{4}$ hay un mínimo relativo de f
- ☐ en $x = 0$ hay un mínimo relativo de f
- ■ en $x = \frac{1}{4}$ hay un máximo relativo de f
- ☐ en $x = 4$ hay un máximo relativo de f

d) (1 punto) La imagen de f es:....... $\left[f(-\frac{1}{4});\ f(\frac{1}{4})\right]$.........

Resolución:

Dom f : $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ por lo tanto $y = 0$ es AH (no tiene AO)

$f'(x) = \dfrac{6(16x^2+1) - 6x \cdot 32x}{(16x^2+1)^2} = \dfrac{-96x^2+6}{(16x^2+1)^2}$ $\quad f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{4}$ $\ x = -\frac{1}{4}$ (puntos críticos)

f decrece en $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$ y en $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$

f crece en $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$

en $x = \frac{1}{4}$ hay un máximo, en $x = -\frac{1}{4}$ hay un mínimo