02/05/2024 **TEMA 13**

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	**2**	**3**	**4**
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30’. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Hallar la función cuadrática que satisface que:

- **La gráfica pasa por los puntos $\boldsymbol{A=(1;0)}$ y $\boldsymbol{B=\left(0;-\frac{3}{2}\right)}$**
- **La abscisa del vértice está en $\boldsymbol{x_v=2}$.**

Para la realización de este ejercicio se debe considerar los apuntes correspondientes a función cuadrática
Una función cuadrática puede ser expresada en su forma polinómica, canónica o factorizada.
Si queremos buscar por ejemplo su expresión factorizada, deberíamos hallar sus raíces y su coeficiente principal, ya que la misma se escribe de la siguiente manera:

$$f(x)=a\,.(x-x_1).(x-x_2)$$

Como la función pasa por el punto $A=(1;0)$, esto nos indica que, como la coordenada en “y” es cero, entonces, $x=1$ es raíz.
A su vez, al conocer el x_v , deducimos que en $x=2$ encontraremos el eje de simetría. Luego, a partir de él, podemos hallar el punto simétrico de $A=(1;0)$ respecto del eje de simetría para hallar la otra raíz. Es decir que ambas raíces deben encontrarse a la misma distancia de $x=2$, con lo cuál, la otra raíz se encontrará en el punto $(3;0)$. En otras palabras, $x=3$ es raíz de la función pedida, por lo que hasta el momento reemplazando las raíces encontradas en la expresión, obtendremos:

$$f(x)=a\,.(x-1).(x-3)$$

A su vez, sabemos que la función pasa por el punto $B=\left(0;-\frac{3}{2}\right)$, de forma tal que, reemplazando en la función, lograremos hallar su coeficiente principal:

$$-\frac{3}{2}=a\,.(0-1).(0-3)$$
$$-\frac{3}{2}=a\,.(-1).(-3)$$
$$-\frac{3}{2}=a\,.\;3$$
$$-\frac{3}{2}:3=a$$
$$-\frac{3}{2}.\frac{1}{3}=a$$
$$-\frac{1}{2}=a$$

Por lo tanto, la función pedida será:

$$f(x)=-\frac{1}{2}.(x-1).(x-3)$$

2. Hallar el C^+(Conjunto de positividad) de la función $\boldsymbol{f(x) = (5-x)^2.(x+3)}$

Para la realización de este ejercicio se debe considerar los apuntes correspondientes a función polinómica y polinomios e intervalos.

Para poder determinar el conjunto de positividad, será necesario hallar las raíces de la función. Al estar expresada en su forma factorizada, es posible notar que sus raíces son: $x = 5$ y $x = -3$.

Luego, para hallar su conjunto de positividad, debemos evaluar la función en los intervalos que quedan determinados a partir de sus raíces:

$(-\infty; -3)$	$(-3; 5)$	$(5; +\infty)$

Por ejemplo, para los valores:

$\mathrm{x} = -4 \;\rightarrow\; f(-4) = \left(5-(-4)\right)^2 . (-4+3) =$

$f(-4) = -81$

$\mathrm{x} = 0 \;\rightarrow\; f(0) = (5-0)^2 . (0+3) =$

$f(0) = 75$

$\mathrm{x} = 6 \;\rightarrow\; f(6) = (5-6)^2 . (6+3) =$

$f(6) = 9$

Al ser positivo $f(0)$ y $f(6)$, la función será positiva en los intervalos $(-3; 5)$ y $(5; +\infty)$:

$(-\infty; -3)$	$(-3; 5)$	$(5; +\infty)$
$-$	$+$	$+$

Por lo tanto, el conjunto de positividad será:

$$C^+ = (-3; 5) \cup (5;\ +\infty)$$

3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-3\,;3)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $y = 2x + \frac{1}{3}$

Para la realización de este ejercicio se debe considerar los apuntes correspondientes a función lineal.

Como nos piden hallar la ecuación de una recta, en principio debemos recordar la expresión de la misma:

$y = a.x + b$ (donde a es la pendiente y b su ordenada al origen).

Obtendremos la ecuación de la recta una vez que hallemos su pendiente y ordenada.

Dos rectas son perpendiculares cuando sus pendientes son opuestas e inversas. Es decir que, en este caso, como la recta es perpendicular a $y = 2x + \frac{1}{3}$, su pendiente será $a = -\frac{1}{2}$.

En otras palabras, hasta el momento podemos expresar a la recta como:

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

Luego, como conocemos un punto de la recta, es posible reemplazarlo en la ecuación para hallar b:

$$3 = -\frac{1}{2}\,.(-3) + b$$

$$3 = \frac{3}{2} + b$$

$$3 - \frac{3}{2} = b$$

$$\frac{6}{2} - \frac{3}{2} = b$$

$$\frac{3}{2} = b$$

Reemplazando b en la ecuación, nos quedará:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

4. Sabiendo que $x = 1$ es una de las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x$, hallar las raíces Restantes (considerando su orden de multiplicidad).

Para la realización de este ejercicio se debe considerar los apuntes correspondientes a función polinómica y polinomios.

Para hallar las raíces del polinomio, es conveniente factorizar el mismo.

Podemos observar que $P(x)$ es de grado 4, con lo cual, tendrá como máximo 4 raíces.

Como todos los términos poseen x, es posible extraer factor común, de tal manera que:

$$P(x) = x\,.\,(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$$

Luego, como nos indican que $x = 1$ es una de las raíces del polinomio, podemos utilizar la regla de Ruffini para continuar factorizando a: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

	1	*-5*	*8*	*-4*
1		*1*	*-4*	*4*
	1	*-4*	*4*	*0*

Por lo tanto, hasta el momento podemos expresar al polinomio de la siguiente manera:

$$P(x) = x\,.\,(x - 1)\,.\,(x^2 - 4x + 4)$$

Por último, debemos factorizar al polinomio de grado dos, que, si observamos detenidamente, es un trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

Finalmente, el polinomio $P(x)$ en su forma factorizada será:

$$P(x) = x\,.\,(x - 1)\,.\,(x - 2)^2$$

Las raíces del polinomio serán aquellas que cumplan que $P(x) = 0$. Esto sucede cuando alguno de sus factores es cero.

En consecuencia, sus raíces serán:

$x = 0$

$x = 1$
(que era dato del ejercicio)

$x - 2 = 0$

$x = 2$
(Su orden de multiplicidad es dos, puesto que x=2 es una raíz doble)