

03/05/2024

TEMA 12
Hoja 1 de 4

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	
TEL:	DOCENTE (nombre y apellido):
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Dada la función $f(x) = \frac{x}{3x-k}$ hallar su función inversa $f^{-1}(x)$ y obtener el valor de la constante $k \in \mathbb{R}$ para que se cumpla que $f^{-1}(2) = 4$

De $f^{-1}(x) = y$ obtenemos que $x = f(y)$, por lo que:

$$x = \frac{y}{3y - k}$$

$$(3y - k)x = y$$

$$3yx - kx = y$$

$$-kx = y - 3yx$$

$$-kx = y(1 - 3x)$$

$$\frac{-kx}{1 - 3x} = y$$

Por lo que $f^{-1}(x) = \frac{-kx}{1-3x}$

Como queremos que $f^{-1}(2) = 4$, resulta que:

$$4 = \frac{-k \cdot 2}{1 - 3 \cdot 2}$$

$$4 = \frac{-2k}{1 - 6}$$

$$4 = \frac{-2k}{-5}$$

$$4 \cdot (-5) = -2k$$

$$-20 = -2k$$

$$-20 : (-2) = k$$

$$10 = k$$

Reemplazando por el valor de k encontrado obtenemos que: $f^{-1}(x) = \frac{-10x}{1-3x}$

2. Hallar los valores $x \in \mathbb{R}$ que son solución de la siguiente inecuación $\frac{8x-4}{5x+2} > 6$

Primero modificamos la inecuación para comparar con cero:

$$\frac{8x-4}{5x+2} > 6$$

$$\frac{8x-4}{5x+2} - 6 > 0$$

$$\frac{(8x-4) - 6(5x+2)}{5x+2} > 0$$

$$\frac{8x-4-30x-12}{5x+2} > 0$$

$$\frac{-22x-16}{5x+2} > 0$$

Esto lo hicimos pues ahora podemos aplicar la propiedad: $\frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow a > 0 \text{ y } b > 0$ o bien $a < 0 \text{ y } b < 0$, por lo tanto, de la inecuación de arriba nos quedan las inecuaciones:

$$-22x - 16 > 0 \text{ y } 5x + 2 > 0$$

O bien

$$-22x - 16 < 0 \text{ y } 5x + 2 < 0$$

Despejando en el primer caso obtenemos:

$$\begin{array}{ll} -22x - 16 > 0 & 5x + 2 > 0 \\ -16 > 22x & 5x > -2 \\ \frac{-8}{11} > x \text{ (es decir, } x < -\frac{8}{11}) & x > \frac{-2}{5} \end{array}$$

Como se deben dar las dos inecuaciones simultáneamente, nos queda que no puede haber $x \in \mathbb{R}$ que verifique simultáneamente que

$$x < \frac{-8}{11}$$

Pero al mismo tiempo:

$$x > \frac{-2}{5}$$

Es decir, de estas inecuaciones no obtenemos ninguna solución.

Con las segundas dos inecuaciones, procedemos de manera similar:

$$-22x - 16 < 0$$

$$-16 < 22x$$

$$\frac{-8}{11} < x \text{ (es decir, } x > -\frac{8}{11}\text{)}$$

$$5x + 2 < 0$$

$$5x < -2$$

$$x < \frac{-2}{5}$$

Como se deben dar las dos inecuaciones simultáneamente, nos queda que:

$$\frac{-8}{11} < x < \frac{-2}{5}$$

Siendo este el conjunto solución de la inecuación original. Por lo tanto, $x \in \left(-\frac{8}{11}; -\frac{2}{5}\right)$

3. Dada la función $f(x) = -4x + 6$ y el punto $P = (a; 10)$, determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que P sea un punto del gráfico de f . Para el valor hallado, calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y $Q = (4; 22)$

Para que P sea un punto del gráfico de f , debe cumplir que $f(a) = 10$, por lo que, reemplazando, obtenemos que:

$$10 = -4a + 6$$

$$10 - 6 = -4a$$

$$4 = -4a$$

$$4 : (-4) = a$$

$$-1 = a$$

Recordemos que recta que pasa por puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ cumple la ecuación:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

Reemplazando con los puntos $P = (-1; 10)$ y $Q = (4; 22)$, obtenemos:

$$y = \frac{22 - 10}{4 - (-1)}(x - (-1)) + 10$$

$$y = \frac{12}{5}(x + 1) + 10$$

$$y = \frac{12}{5}x + \frac{12}{5} + 10$$

$$y = \frac{12}{5}x + \frac{62}{5}$$

que es la ecuación de la recta buscada.

APELLIDO Y NOMBRE:

DNI:

TEMA 12
Hoja 4 de 4

4. Hallar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ sabiendo que

$$P(x) = ax^3 - 5bx$$

$$Q(x) = (b - 2a)x - 4$$

cumplen las siguientes relaciones

$$2P(1) + Q(4) = 0$$

$$P(0) - Q(1) = 0$$

Evaluando $P(x)$ y $Q(x)$ en los puntos pedidos, obtenemos que:

$$P(1) = a \cdot 1^3 - 5b \cdot 1 \Rightarrow P(1) = a - 5b$$

$$P(0) = a \cdot 0^3 - 5b \cdot 0 \Rightarrow P(0) = 0$$

$$Q(1) = (b - 2a) \cdot 1 - 4 \Rightarrow Q(1) = b - 2a - 4$$

$$Q(4) = (b - 2a)4 - 4$$

Por lo que

$$2P(1) + Q(4) = 0$$

$$P(0) - Q(1) = 0$$

Se traducen en:

$$2(a - 5b) + (b - 2a)4 - 4 = 0$$

$$0 - (b - 2a - 4) = 0$$

De las que obtenemos:

$$2a - 10b + 4b - 8a - 4 = 0$$

$$-b + 2a + 4 = 0 \Rightarrow b - 2a - 4 = 0$$

De lo que surge que:

$$-6a - 6b - 4 = 0$$

$$b = 2a + 4$$

Y finalmente:

$$-3a - 3b - 2 = 0$$

$$b = 2a + 4$$

Reemplazando la segunda ecuación en la primera, obtenemos:

$$-3a - 3(2a + 4) - 2 = 0$$

$$-3a - 6a - 12 - 2 = 0$$

$$-9a - 14 = 0$$

$$a = \frac{14}{-9}$$

$$a = -\frac{14}{9}$$

Reemplazando dicho valor en la segunda ecuación, obtenemos:

$$b = 2\left(-\frac{14}{9}\right) + 4$$

$$b = -\frac{28}{9} + 4$$

$$b = \frac{8}{9}$$