APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30’. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Hallar los valores $x \in R$ que son solución de la siguiente inecuación $\frac{7x+2}{2x-1} > 3$

Solución:
Para resolver esta desigualdad, primero comparamos con cero y reescribimos la expresión como sigue

$$\frac{7x+2}{2x-1} > 3$$

$$\frac{7x+2}{2x-1} - 3 > 0$$

$$\frac{7x+2\ -3(2x-1)}{2x-1} > 0$$

$$\frac{7x+2\ -6x+3}{2x-1} > 0$$

$$\frac{x+5}{2x-1} > 0$$

Para que la fracción sea mayor que cero, es decir que tenga signo positivo, debe cumplirse algunos de los siguientes casos:

Caso 1:

$$x+5 > 0 \quad \textbf{y} \quad 2x-1 > 0$$

$$x > -5 \quad \textbf{y} \quad 2x > 1$$

$$x > -5 \quad \textbf{y} \quad x > \frac{1}{2}$$

Los valores de x que verifican ambas condiciones en simultáneo son aquellos mayores a $\frac{1}{2}$, por lo que la solución para este primer caso es $(\frac{1}{2};\ +\infty)$.

Caso 2:

$$x+5\ < 0 \quad \textbf{y} \quad 2x-1 < 0$$

$$x < -5 \quad \textbf{y} \quad 2x < 1$$

$$x < -5 \quad \textbf{y} \quad x < \frac{1}{2}$$

La solución en este caso es $x\ \in (-\infty;\ -5)$.

Luego, la solución final queda expresada como la unión de ambas soluciones, por lo que $x\ \in (-\infty;\ -5) \cup (\frac{1}{2};\ +\infty)$.

2. Dada la función $f(x) = -2x + 3$ y el punto $P = (a; 5)$, determinar el valor de $a \in R$ para que P sea un punto del gráfico de f. Para el valor hallado, calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y $Q = (2; 11)$

Solución:

Para que P sea un punto del gráfico de la función, debe ser de la forma $(a; f(a))$. Luego, debe verificarse que $f(a) = 5$.

Planteamos esta última condición:

$$f(a) = 5$$

$$-2.a + 3 = 5$$

$$-2.a = 5 - 3$$

$$-2a = 2$$

$$a = 2:(-2)$$

$$a = -1$$

De esta manera, tenemos que $P = (-1; 5)$.

Por otro lado, sea $g(x) = mx + b$ la función lineal que pasa por P y Q. Esto significa que, como g pasa por P, vale que $g(-1) = 5$, y como también pasa por Q, se tiene que $g(2) = 11$. Luego,

$$m.(-1) + b = 5 \quad \text{y} \quad m.2 + b = 11$$

$$-m + b = 5 \quad \text{y} \quad 2m + b = 11$$

$$b = 5 + m \quad \text{y} \quad b = 11 - 2m$$

por lo que $5 + m = 11 - 2m$, y podemos despejar el valor de la pendiente

$$2m + m = 11 - 5$$

$$3m = 6$$

$$m = 6:3$$

$$m = 2$$

Reemplazando este valor en alguna de las dos igualdades anteriores, obtenemos el valor de la ordenada

$$b = 5 + 2$$

$$b = 7$$

Luego, la recta que pasa por los puntos P y Q dados es $y = 2x + 7$.

3. Hallar los valores de $a, b \in R$ sabiendo que los polinomios

$$P(x) = (a + 2b)\, x^2 + 6x + 4 \qquad\qquad Q(x) = -x^2 + (5a - b)x + \frac{8}{3}$$

cumplen la siguiente relación $2P(x) - 3Q(x) = 0$.

Solución:

Planteamos la relación que cumplen los polinomios para obtener una relación entre los valores de a y b:

$$2P(x) - 3Q(x) = 0$$
$$2P(x) = 3Q(x)$$
$$2((a + 2b)\, x^2 + 6x + 4\,) = 3(-x^2 + (5a - b)x + \frac{8}{3})$$
$$2(a + 2b)\, x^2 + 12x + 8 = -3x^2 + 3(5a - b)x + 8$$

Esta igualdad entre polinomios a la que llegamos se verifica si y sólo si sus coeficientes son iguales entre sí. Es decir, los coeficientes del término cuadrático deben ser iguales, así como también los del término lineal y el término independiente. Esto es

1) $2(a + 2b) \ = \ -3$
2) $12 \ = \ 3(5a - b)$
3) $8 \ = \ 8$ (se verifica)

A partir de las relaciones 1) y 2), hallamos los valores de a y b como sigue:

1) $2(a + 2b) \ = -3$

$$2a + 4b \ = -3$$
$$2a \ = -4b - 3$$
$$a \ = \frac{-4}{2} b - \frac{3}{2}$$
$$a \ = -2b - \frac{3}{2}$$

y

2) $12 \ = \ 3(5a - b)$

$$12 \ = \ 15a - 3b$$
$$12 + 3b \ = \ 15a$$
$$\frac{12}{15} + \frac{3}{15} b \ = a$$
$$\frac{4}{5} + \frac{1}{5} b \ = a$$

De la primera relación obtuvimos que $a \ = -2b - \frac{3}{2}$, y de la segunda $\boldsymbol{a} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} b$, luego

$$-2b - \frac{3}{2} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} b$$

$$-\frac{4}{5}-\frac{3}{2}=2b+\frac{1}{5}b$$

$$-\frac{23}{10}=\frac{11}{5}b$$

$$-\frac{23}{10}:\frac{11}{5}=b$$

$$-\frac{23}{10}.\frac{5}{11}=b$$

$$\boldsymbol{b=-\frac{23}{22}}$$

Reemplazando el valor de b en algunas de las dos relaciones anteriores, obtenemos

$$a=-2.(-\frac{23}{22})-\frac{3}{2}=\frac{46}{22}-\frac{3}{2}=\frac{46}{22}-\frac{33}{22}$$

$$\boldsymbol{a=\frac{13}{22}}$$

4. Dada la función $h(x) = \frac{2x}{5x-c}$, hallar su función inversa $h^{-1}(x)$ y obtener el valor de la constante $c \in R$ para que se cumpla que $h^{-1}(1) = 2$

Solución:

La igualdad $h^{-1}(1) = 2$ se verifica si y sólo si $\boldsymbol{h}(2) = 1$. Resolvemos esta última ecuación

$$\boldsymbol{h}(2) = 1$$

$$\frac{2.2}{5.2 - c} = 1$$

$$\frac{4}{10 - c} = 1$$

$$4 = 10 - c$$

$$c = 6.$$

Luego, $h(x) = \frac{2x}{5x-6}$. Hallamos ahora su función inversa:

$$\boldsymbol{y} = \frac{2x}{5x - 6}$$

$$\boldsymbol{y}(5x - 6) = 2x$$

$$\boldsymbol{5y}x - 6y = 2x$$

$$\boldsymbol{5y}x - 2x = 6y$$

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{5y} - 2) = 6y$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{6y}{\boldsymbol{5y}-2}.$$

Intercambiando variables:

$$y = \frac{6x}{\boldsymbol{5x}-2}.$$

Por lo tanto, $h^{-1}(\boldsymbol{x}) = \frac{6x}{\boldsymbol{5x}-2}$.