APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Dada $f(x) = e^{-x^3+21x}$, determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.

Lo primero que necesitamos conocer es el dominio de la función. Como su expresión no presenta ninguna restricción, el dominio es $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Para hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, analizamos el signo de la derivada.

$f'(x) = \ e^{-x^3+21x}$. (-3$x^2 + 21$). Notamos que para hallar la derivada aplicamos la regla de la cadena por tratarse de una función compuesta, y que el dominio de esta coincide con el dominio de la función original. Utilizamos ahora el teorema de Bolzano aplicado a f' para saber cómo varía su signo en su dominio.

Calculamos el conjunto de ceros de f':

$e^{-x^3+21x}.(-3x^2 + 21) = 0$

Como la exponencial siempre toma valores positivos, la ecuación anterior es equivalente a

$-3x^2 + 21 = 0$

$-x^2 + 7 = 0$

$|x| = \sqrt{7}$

$x = \ \sqrt{7}, x = \ -\sqrt{7}$

Luego, el conjunto de ceros de la derivada es $C_0(f') = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$.

Evaluamos f' en algún punto del conjunto $(-\infty; -\sqrt{7})$ para ver su signo:

$f'(-3) = e^{27-63}.(-3.9 + 21) < 0$, luego, f' es negativa en $(-\infty; -\sqrt{7})$.

Análogamente, en el intervalo $(-\sqrt{7}; \sqrt{7})$:

$f'(0) = e^0.(0 + 21) = 21 > 0$, por lo que f' es positiva en $(-\sqrt{7}; \sqrt{7})$.

En $(\sqrt{7}; +\infty)$ la derivada es nuevamente negativa ya que, por ejemplo,

$f'(3) = e^{-27+63}.(-3.9 + 21) < 0.$

De esta forma, por el criterio de la derivada el intervalo de crecimiento de la función f es $(-\sqrt{7}; \sqrt{7})$ y los intervalos de decrecimiento son $(-\infty; -\sqrt{7})$ y $(\sqrt{7}; +\infty)$. Además, como la función decrece a la izquierda de -$\sqrt{7}$ y crece a su derecha, entonces $x = -\sqrt{7}$ es un mínimo relativo; y como f crece a la izquierda de $\sqrt{7}$ y decrece a su derecha, la abscisa $x = \sqrt{7}$ es un máximo relativo.

2. Calcular la siguiente integral $\int \left(x.\sqrt{x^2+5}\right) dx$

Para resolver estos ejercicios se tendrán en cuenta los temas abordados durante todo el cuatrimestre: Funciones- Operaciones con polinomios- Integrales inmediatas- Integrales por sustitución.

Designamos a: $t = \boldsymbol{x^2 + 5}$ y luego derivamos la expresión**:**

$$dt = 2x\,dx$$

$$\frac{dt}{2} = x\,dx$$

Vemos que:

$$\int x.\sqrt{x^2+5}\,dx = \int \sqrt{t}\,\frac{dt}{2}$$

$$\int x.\sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{1}{2}\int t^{1/2}\,dt$$

$$\int x.\sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{1}{2}.\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C$$

Volvemos a realizar la sustitución correspondiente y nos queda:

$$\int x.\sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}(x^2+5)^{\frac{3}{2}} + C$$

Por lo tanto:

$$\int x.\sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{1}{3}.(x^2+5)^{\frac{3}{2}} + C$$

3. ¿Cuántas palabras distintas, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra "SOMBRAS" si deben terminar con la letra "O"?

Buscamos utilizar las 7 letras de la palabra "SOMBRAS" para armar los nuevos vocablos (independientemente de si éstos tienen o no sentido en nuestro idioma). Por otra parte, importa el orden en que se eligen las letras para formar dichos términos. Luego, estamos ante un caso de permutación o reordenamiento de elementos.

Siendo además que buscamos palabras que finalizan con la letra "O", en lugar de permutar los 7 caracteres disponibles, debemos reordenar solo 6 de ellos, aquellos que justamente ocupan las posiciones 1 a 6 dentro de cada nueva palabra.

Por otra parte, recordemos que:

Cuando en los ***n*** elementos existen elementos repetidos (un elemento aparece ***a*** veces, otro aparece ***b*** veces, otro ***c*** veces, y el último ***r*** veces, verificándose que $a + b + c + \ldots + r = n$ las permutaciones reciben el nombre de permutaciones con repetición.

Su número se obtiene mediante la fórmula:

$$P_n^{a,b,c,\ldots,r} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot \ldots \cdot r!}$$

Luego,como hay 2 letras "S" disponibles entre las 6 a reordenar, tendremos:

$$P_6^{2,1,1,1,1} = \frac{6!}{2!\,1!\,1!\,1!\,1!} = \frac{6.5.4.3.2!}{2!} = 6.5.4.3 = 360$$

palabras distintas que pueden formarse con las 7 letras de la palabra **"SOMBRAS"** y que además terminan con la letra **"O".**

4. Encontrar el/los valores de $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{R}$ para que el $|A| = 7$ si $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{k+3} \end{pmatrix}$

Hallamos el determinante de $A = k(k+3) - 3 = k^2 + 3k - 3$

$$(k^2 + 3k - 3 = 7) \rightarrow (k^2 + 3k - 10 = 0) \rightarrow k = 2, k = -5$$

Referencia: Unidad 9: Sistema de ecuaciones y matrices