APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	**2**	**3**	**4**
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. En un examen universitario de cierta asignatura los estudiantes deben elegir de un total de 8 preguntas disponibles, 5 de ellas para desarrollar. ¿De cuántas maneras pueden efectuar la selección?

En principio, debemos tener en cuenta que estamos frente a una selección en la que no importa el orden en que se elijan las 5 preguntas a incluir en el examen. Es decir, dos exámenes con las mismas preguntas formuladas en un orden diverso se consideran idénticos.

Además, resulta evidente que cada una de dichas preguntas solo puede elegirse una vez.

Luego, estamos frente a un caso de combinación simple o sin repetición, por lo que existe un total de $C_{8,5}$ formas distintas de efectuar la selección.

Esto es: $C_{8,5} = \frac{8!}{(8-5)!5!} \rightarrow C_{8,5} = \frac{8.7.6.5!}{3!\,5!} \rightarrow C_{8,5} = \frac{8.7.\cancel{6.5}!}{\cancel{6.5}!} \rightarrow C_{8,5} = 56$ exámenes diferentes

Para profundizar sobre los contenidos abordados en la resolución del presente ejercicio les sugerimos revisar el apunte de cátedra titulado "Elementos de combinatoria" que se encuentra como material de consulta en el Campus Virtual de la asignatura.

2. Resolver: $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \boldsymbol{dx}$

Para la realización de este ejercicio se deben considerar los siguientes contenidos:

Función exponencial, Tabla de derivadas, Integrales; Métodos de integración: sustitución

Es posible resolver esta integral mediante el método de sustitución:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

Realizamos un cambio de variable: $u = \sqrt{x}$ (1)

Derivando: $du = \frac{1}{2} . \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$2du = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (2)

Reemplazando (1) y (2) en la integral: $\int e^u . 2\, du$

Por prop: $\int a . f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$: $2 \int e^u du$

Integrando: $2. [e^u + C_1]$

Aplicando prop. distributiva: $2 . e^u + C$

Reemplazando (1) en la expresión: $2. e^{\sqrt{x}} + C$

3. Determinar los valores de $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}$ para que el siguiente sistema resulte incompatible:

$$\begin{cases} x + y + bz = 0 \\ 2x + by + z = 1 \\ x + y + z = b \end{cases}$$

En principio, notemos que el sistema:

$$\begin{cases} x + y + bz = 0 \\ 2x + by + z = 1 \\ x + y + z = b \end{cases}$$

Encuentra su equivalente matricial en la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

Luego, para determinar su conjunto solución emplearemos el método de eliminación de Gauss sobre la matriz ampliada (ver apunte de cátedra titulado *“Sistemas lineales y matrices”* disponible para consulta en el Campus Virtual de la asignatura).

Inicialmente, tenemos la siguiente disposición:

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & b & 0 \\ 2 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right.$$

Efectuando las operaciones elementales $2F_1 - F_2 \rightarrow F_2 \ y \ F_1 - F_3 \rightarrow F_3$, resulta:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & b & 0 \\ 0 & 2-b & 2b-1 & -1 \\ 0 & 0 & b-1 & -b \end{array} \quad (1)$$

Ahora bien, del análisis de la última fila de la matriz obtenida en (1) se desprende directamente que para que el sistema dado resulte incompatible deben darse simultáneamente las siguientes condiciones: $b - 1 = 0$ y $-b \neq 0$, es decir, $b = 1$ y $b \neq 0$

Luego, el único valor de $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}$ tal que el sistema resulta incompatible es $\boldsymbol{b = 1}$

4. Dados los vectores en $\mathbb{R}^3$; $\vec{a} = 2i - j + 3\,k$ y $\vec{b} = -3i + j - k$, hallar el vector $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ tal que

$-2\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$

$$\vec{a} = 2i - j + 3\,k \to \vec{a} = (2;-1;3)$$

$$\vec{b} = -3i + j - k \to \vec{b} = (-3;1;-1)$$

Planteamos la igualdad propuesta en el enunciado para hallar las componentes del vector $\vec{c}$.

$$-2\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$$

$$-2.(2;-1;3) + (c_x;c_y;c_z) = (-3;1;-1)$$

$$(-4;2;-6) + (c_x;c_y;c_z) = (-3;1;-1)$$

$$\left(-4 + c_x; 2 + c_y; -6 + c_z\right) = (-3;1;-1)$$

$$\begin{cases} -4 + c_x = -3 \Rightarrow c_x = 1 \\ 2 + c_y = 1 \Rightarrow c_y = -1 \\ -6 + c_z = -1 \Rightarrow c_x = 5 \end{cases}$$

$$\vec{c} = (1;-1;5)$$

Expresado en forma cartesiana:

$$\vec{c} = i - j + 5\,k$$