B **ÁLGEBRA (27)** 2^{do} **Parcial** 2^{do} **Cuatrimestre de 2024** **Tema 1**

APELLIDO .... **NOMBRES** ...... **DNI.** ....

INSCRIPTO EN: O | SEDE: CU | DIAS: MA - Mi - Vi | HORARIO: 10 a 13 | AULA: 210

1	2	3	4	NOTA
B	B	B	B	10 (diez)

NOTA 1er parcial:	PROMOCIONA	RECUPERA
5 (cinco)	8 (ocho)	
	INSUFICIENTE	FINAL

1.- Sean $\mathbb{S} = \langle (1,-1,-1,0), (-1,1,2,1) \rangle$, $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$ y $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 3x_3 + x_4 = 0\}$. Hallar, si es posible, $a \in \mathbb{R}$ y una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tales que $f(1,0,0,-1) = (a,1,1,-3)$ y $f(\mathbb{S}) \oplus f(\mathbb{T}) = \mathbb{W}$.

2.- Sean $B_1 = \{(1,0,1,0); (0,0,1,0); (0,0,0,1); (0,1,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^4$ y $B_2 = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{V}$ la transformación lineal tal que $M_{B_1 B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Hallar todos los $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ tales que $f(\mathbf{x}) = 3\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3$.

3.- Sea $P(x) = x^2 - 2ix - 17$. Hallar un polinomio $Q \in \mathbb{R}[x]$ de grado mínimo tal que todas las raíces de P sean raíces de Q y tal que $Q(1) = -520$.

4.- Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales 4 es un autovalor de $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & k & k^2 + k \end{pmatrix}$ y A es diagonalizable.

1) $S = \langle (1,-1,-1,0), (-1,1,2,1) \rangle$

Busco generadores de T:

$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2 + 2x_3 - x_4 \Rightarrow (-x_2+2x_3-x_4, x_2, x_3, x_4) =$

$x_2(-1,1,0,0) + x_3(2,0,1,0) + x_4(-1,0,0,1)$

$T = \langle (-1,1,0,0), (2,0,1,0), (-1,0,0,1) \rangle$

Busco generadores de W

$x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \rightarrow x_1 = 3x_3 - x_4 \Rightarrow (3x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) =$

$x_3(3,0,1,0) + x_2(0,1,0,0) + x_4(-1,0,0,1)$

$W = \langle (3,0,1,0), (0,1,0,0), (-1,0,0,1) \rangle$

NO

Armo una base de $\mathbb{R}^4$ con los generadores de S y T.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 + 2F_1 \to F_3 \\ F_4 + F_1 \to F_4 \\ F_5 - F_1 \to F_5 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ F_4 + F_2 \to F_4 \\ F_5 - F_2 \to F_5 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1 \cdot (-1) \to F_1 \\ \\ \\ F_4 + F_3 \to F_4 \\ F_5 - 2F_3 \to F_5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$S \cap T$: Uso un vector genérico de S y lo pongo en la ecuación de T. S_{gen}: $\alpha(1,-1,-1,0) + \beta(-1,1,2,1) = (\alpha - \beta, -\alpha + \beta, -\alpha + 2\beta, \beta)$

En la ecuación de T: $\cancel{\alpha} - \cancel{\beta} - \cancel{\alpha} + \cancel{\beta} - 2(-\alpha + 2\beta) + \beta = 0$

$$2\alpha - 3\beta = 0$$
$$\alpha = \frac{3}{2}\beta$$

Reemplazo: $(\frac{3}{2}\beta - \beta, -\frac{3}{2}\beta + \beta, -\frac{3}{2}\beta + 2\beta, \beta) = \beta(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

$S \cap T: \langle (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) \rangle \rightarrow$ Cambio los generadores de S y T reemplazando alguno por $S \cap T$.

$S = \langle (1,-1,-1,0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) \rangle \quad T = \langle (-1,1,0,0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), (-1,0,0,1) \rangle$

Ahora armo una base de $\mathbb{R}^4$ con los generadores.

→ Lo multiplico para usarlo Condición $f(1,0,0,-1)$

$$\begin{array}{l} S \\ T \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 + \frac{1}{2} F_1 \to F_3 \\ F_4 + F_1 \to F_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 \cdot (-1) \to F_1 \\ F_3 + \frac{1}{2} F_2 \to F_3 \\ F_4 + F_2 \to F_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} F_4 + 2F_3 \to F_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ Como son li los uso como base de $\mathbb{R}^4$.

$\underbrace{f(1,0,0,-1)}_{\in T} \Rightarrow$ busco un valor de $a / (a,1,1,-3) \in W$

$$(a,1,1,-3) = \alpha(3,0,1,0) + \beta(0,1,0,0) + \gamma(-1,0,0,1)$$
$$= (3\alpha - \gamma, \beta, \alpha, \gamma)$$

$a = 3\alpha - \gamma \to a = 3 \cdot 1 - (-3) = 6 = a$

$1 = \beta$

$1 = \alpha$ Compruebo: $(6,1,1,-3) = (3,0,1,0) + (0,1,0,0) - 3(-1,0,0,1)$

$-3 = \gamma$ $(6,1,1,-3) = (6,1,1,-3)$, pertenece

Entonces $\underline{a = 6}$ y la tl es

respuesta:
$$\begin{cases} f(1,0,0,-1) = (6,1,1,-3) \\ f(-1,1,0,0) = (-1,0,0,1) \\ f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) = (0,0,0,0) \\ f(1,-1,-1,0) = (0,1,0,0) \end{cases}$$

→ Lo mando al Nuf, así cumple el teorema de la dimensión ★

$Imf = \langle (6,1,1,-3), (-1,0,0,1) (0,1,0,0) \rangle \to Dim = 3$ $= W$

$Nuf = \langle (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) \rangle \to Dim = 1$ } Cumplen el teorema

★ También al mandar $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ al Nuf, $f(S) \oplus f(T)$ cumple porque $f(S \cap T) = \{\vec{0}\}$

2) $B_1 = \{(1,0,1,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(0,1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$
$B_2 = \{V_1, V_2, V_3\}$ de V.

Sé que: $M_{B^1B^2}(f) \cdot (X)_{B^1} = (f(X))_{B^2}$

$f(X) = 3V_2 - 3V_3 \Rightarrow (f(X))_{B^2} = (0,3,-3)$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot (X)_{B^1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ Resuelvo el sistema con $M_{B^1B^2}$ ampliada que me va a dar las coordenadas de X en base B_1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 7 & 3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2 - 2F_1 \to F_2 \\ F_3 - 3F_1 \to F_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) F_3 + F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$ $\Rightarrow$ Planteo las ecuaciones y despejo.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \to x_1 - 2x_4 + x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = x_4 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \to x_2 - x_4 + 2x_4 = 3 \Rightarrow x_2 = 3 - x_4 \\ 2x_3 + 2x_4 = 0 \to 2x_3 = -2x_4 \Rightarrow x_3 = -x_4 \end{cases}$$

$(x_4, 3-x_4, -x_4, x_4) = x_4(1,-1,-1,1) + (0,3,0,0)$

Entonces los X con coordenadas generadas por
$(\lambda(1,-1,-1,1) + (0,3,0,0))_{B^1}$ cumplen. (con $\lambda \in \mathbb{R}$)

Osea $\lambda((1,0,1,0) - (0,0,1,0) - (0,0,0,1) + (0,1,0,1)) + 3(0,0,1,0) =$

Rta: $[X = \lambda(1,1,0,0) + (0,0,3,0)]$ son los $X \in \mathbb{R}^4$ tales que $f(X) = 3V_2 - 3V_3$

3) $P(x) = x^2 - 2ix - 17 \qquad P \in \mathbb{C}[x]$

$Q(x) \in \mathbb{R}[x] \;/\; C^\circ(P) \subset C^\circ(Q) \;, Q(1) = -520.$

Busco las raíces de $P(x)$ con la versión compleja de la fórmula cuadrática

$\dfrac{-b+W}{2 \cdot a}$ con $W^2 = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

Calculo W^2

$\dfrac{2i+W}{2} = *$

$W^2 = (-2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-17)$

$W^2 = -4 + 68$

$W^2 = 64$

$W_1 = 8 \quad W_2 = -8$

CA: $(-2i)^2 = (-2)^2 i^2 = -4$

$* \dfrac{2i+W}{2}$

$\dfrac{2i+8}{2} \qquad \dfrac{2i-8}{2}$

$= 4+i \qquad = -4+i$ => Las raíces de P son $\{4i, -4i\}$

Como $Q \in \mathbb{R}[x]$, también son raíces sus ~~opuestos~~ conjugados.

Raíces de $Q(x) = \{4+i; 4-i, -4+i, -4-i\}$, escribo a Q de forma factorizada con coeficiente principal a y despejo $Q(1) = -520$

$Q(x) = a\,(x-(4+i)) \cdot (x-(4-i))\,(x-(-4+i))\,(x-(-4-i))$

$Q(1) = a\,(1-4-i) \cdot (1-4+i) \cdot (1+4-i) \cdot (1+4+i)$

$= a\,\underbrace{(-3-i)(-3+i)}\,\underbrace{(5-i)(5+i)}$

Diferencias de cuadrados

$= a\,((-3)^2 - \underbrace{(i)^2}) \cdot (5^2 - \underbrace{(i)^2}_{1})$

$-520 = a \cdot 10 \cdot 26$

$-2 = a$

Entonces: $Q(x) = -2\,(x-(4+i)) \cdot (x-(4-i))\,(x-(-4+i)) \cdot (x-(-4-i))$

4) $K \in \mathbb{R}$ 4 es autovalor y A diagonalizable

$A \cdot (v) = \lambda (v)$. si 4 es autovalor luego $\lambda = 4$

$(A - 4I)(v) = \vec{0}$

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & K & K^2+K \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right)(v) = \vec{0}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & K & K^2+K-4 \end{pmatrix}}(v) = \vec{0}$$

Calculo el determinante, para que sea un SCI, igualo det = 0.

$$\det\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & K & K^2+K-4 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ K & K^2+K-4 \end{vmatrix} =$$

$$-1 \cdot ((-2 \cdot (K^2+K-4) + 2K) = -(-2K^2 - 2K + 8 + \cancel{2K}) =$$

$2K^2 - 8 = 0$

$K = \sqrt{4}$

$K = 2$ $K = -2$ $\Rightarrow$ Con $K = [-2, 2]$. 4 es autovalor, ahora veo si es diagonalizable, calculando $A - \lambda I$ y reemplazando con cada valor de K.

$K = 2$

$(A - \lambda I)(v) = \vec{0}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & 6-\lambda \end{pmatrix}}_{\text{Determinante}} \cdot (v) = (0)$$

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} (2-\lambda) & -2 \\ 2 & (6-\lambda) \end{vmatrix} = \underbrace{(3-\lambda)}_{\lambda=3} \cdot \underbrace{((2-\lambda) \cdot (6-\lambda) + 4}_{\text{Calculo}}$$

$(2-\lambda) \cdot (6-\lambda) + 4 = 0$

$12 - 2\lambda - 6\lambda + \lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ $\rightarrow$ Resuelvo cuadrática

$$\frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2} = 4$$

Con $K=2$ los autovalores son 3 (con multiplicidad simple) y 4 (con multiplicidad doble). Para que A sea diagonalizable el subespacio que genera autovectores asociados al autovalor 4 tiene que tener dimensión 2.

$\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2 \to F_3} \begin{pmatrix} -1 & +2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -x_1 + 2x_3 - x_3 = 0 \to x_1 = x_3 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \to x_2 = -x_3 \end{array}$$

$$(x_3, -x_3, x_3) = x_3 (1, -1, 1)$$

$S_4 = \langle (1,-1,1) \rangle$

Como es de dimensión 1, no puedo armar una base de autovectores tales que A sea diagonalizable $(K=2)$

$K = -2$

$(A - \lambda I)(v) = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} (v) = \vec{0}$$

Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \underbrace{(3-\lambda)}_{\lambda = 3} \cdot \left((2-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 4\right) = 0$$

$(2-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 4 = 0$

$\cancel{4} - 2\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - \cancel{4} = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda = 0$

$\underbrace{\lambda}_{\lambda = 0} \underbrace{(\lambda - 4)}_{\lambda = 4} = 0$

Los autovalores con $K=-2$ son $\lambda = \{0, 3, 4\}$ y como tienen multiplicidad simple sí que los subespacios de autovectores que generan, armar una base de $\mathbb{R}^3$ tal que A es diagonalizable.

Entonces: Con $K=-2$, 4 es un autovalor de A y A es diagonalizable