A ÁLGEBRA A (62) 2^{do} PARCIAL 2^{do} cuatrimestre de 2024 Tema 2

APELLIDO .... NOMBRE .... DNI ....

NOTA 1°P: 4	Inscripto en:	SEDE: Avellaneda	DIAS: Ma-Mi-V	HORARIO: 7-10 hs	AULA: 27

1	2	3	4	NOTA	Promo	Recu	Final	Insuf
B	B	B	B	10 (diez)	7	22/11 10h		

Los razonamientos usados para la resolución de los problemas deben figurar en la hoja.

1.- Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $C \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $\det(C) = 2$. Calcular el determinante de A si se sabe que que $3.A.C = B$.

2.- Dados el subespacio $\mathbb{S} = \{x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, hallar una base de $T(\mathbb{S})$ y una base del núcleo de T.

3.- Calcular los vértices de la imagen del rectángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ y $(0,2)$ si se le aplica un deslizamiento cortante en la dirección y de factor 2 y luego una rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ en sentido contrario a las agujas del reloj.

4.- Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la cónica $-x^2 + y^2 + 2kx - 24y + 9k^2 = 0$ sea una hipérbola con centro $(4, 12)$. Para el valor de k hallado. encontrar la forma canónica de la hipérbola.

1) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det_{(C)} = 2$.

Calcular $\det_{(A)}$ si se sabe que $3A.C = B$

$$\det_{(3AC)} = \det_{(B)}$$

$$3^3 \cdot \det_{(AC)} = \det_{(B)}$$

$$3^3 \cdot \det_{(A)} \cdot \det_{(C)} = \det_{(B)}$$

CALCULO $\det_{(B)}$.

$\det_{(B)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ DESARROLLO POR COFACTORES POR FILA 2.

$$-1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -1\left(6 - (-12)\right) - 3\left(-3 - 9\right)$$

$$= -1(6+12) - 3\cdot(-12)$$

$$= -18 + 36$$

$$\cancel{\det_{(B)} = 28} \qquad \det_{(B)} = 18$$

$$3^3 \cdot \det_{(A)} \cdot \det_{(C)} = \det_{(B)}$$

$$27 \cdot \det_{(A)} \cdot 2 = 18$$

$54 \cdot \det_{(A)} = 18$

$$\det_{(A)} = \frac{18}{54}$$

$$\det_{(A)} = \frac{1}{3}$$

<u>RTA</u>: $\det_{(A)} = \frac{1}{3}$

2) $S = \{x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}$

$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Hallar una base de $T_{(S)}$ y una base de $Nu_{(T)}$.

Busco generadores de S:

$S: \quad x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$

$x_1 = 3x_2 - x_3$

$S = (3x_2 - x_3, \ x_2 \ , x_3)$

$x_2 (3, 1, 0) + x_3 (-1, 0, 1)$

gen de $S = \langle \underbrace{(3,1,0)}_{s_1} ; \underbrace{(-1,0,1)}_{s_2} \rangle$

$T_{(S)} =$ I) $A_T \cdot s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

II) $A_T \cdot s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Base de $T_{(S)} = \{(4,5,1) ; (0,3,3)\}$.

Ya que son LI.

$$Nu_{(T)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$ SON LD

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_2 = -3x_3$ LO REEMPLAZO EN LA PRIMERA ECUACIÓN. $\rightarrow$ $x_1 - 3x_3 + x_3 = 0$

$x_1 - 2x_3 = 0$

$x_1 = 2x_3$

SOLUCIÓN $= (2x_3, -3x_3, x_3) = x_3(2, -3, 1)$

$Nu_{(T)} = \langle (2, -3, 1) \rangle$ y ES BASE. AL SER UNO SOLO ES LI.

$Nu_{(T)} = \{(2, -3, 1)\}$

<u>RTA</u>: $T_{(S)} = \{(4, 5, 1); (0, 3, 3)\}$

$Nu_{(T)} = \{(2, -3, 1)\}$

3) Calcular la imagen de $\overbrace{(0,0)}^{V_1}$, $\overbrace{(1,0)}^{V_2}$, $\underbrace{(1,2)}_{V_3}$ y $\underbrace{(0,2)}_{V_4}$

DESLIZAMIENTO CORTANTE EN DIRECCIÓN Y DE FACTOR 2:

$$A_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ROTACIÓN DE ÁNGULO $\frac{\pi}{2}$ EN SENTIDO ANTIHORARIO.

$$A_R = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ COMPOSICIÓN:

$$A_R \cdot A_D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} A_T$$

IMAGEN DE LOS VÉRTICES:

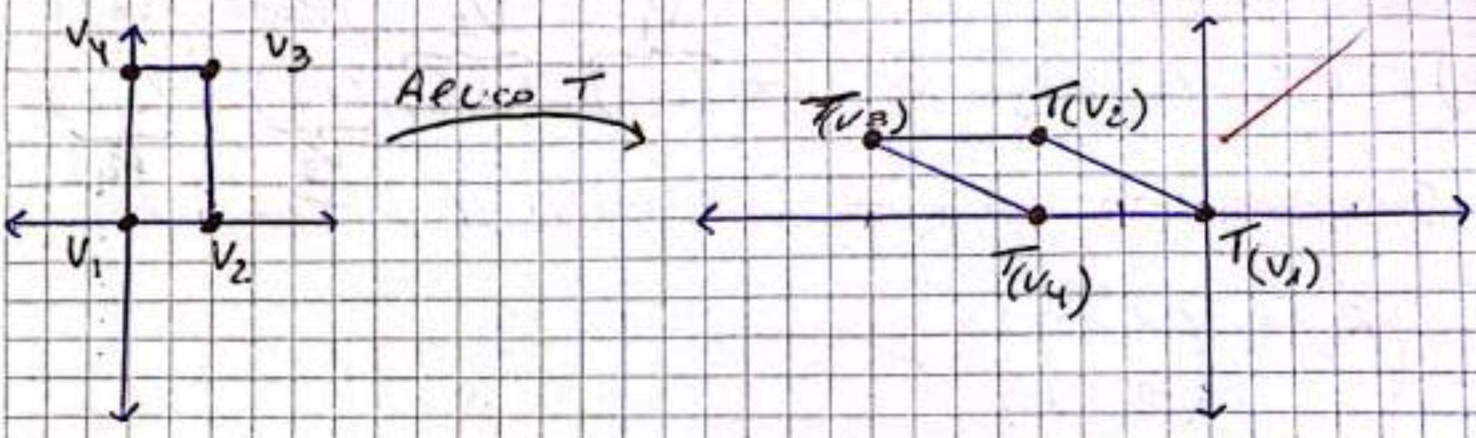
I) $$A_T \cdot V_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

II) $$A_T \cdot V_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

III) $$A_T \cdot V_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

IV) $$A_T \cdot V_4 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

GEOMETRICAMENTE



RTA: LA IMAGENES DE LOS VERTICES:

$V_1: \ T_{(0,0)} = (0,0)$

$V_2: \ T_{(1,0)} = (-2,1)$

$V_3: \ T_{(1,2)} = (-4,1)$

$V_4: \ T_{(0,2)} = (-2,0)$

4) Hallar $k \in \mathbb{R}$ para que $(4,12)$ sea el centro de la cónica. hallar la forma canónica.

$$-x^2+y^2+2kx-24y+9k^2=0$$

$$-x^2+2kx+y^2-24y+9k^2=0$$

$$-(x^2+2kx+k^2-k^2)+\left(y^2-2\cdot\frac{24}{2}y+144-144\right)+9k^2=0$$

$$-((x+k)^2-k^2)+((y-12)^2-144)+9k^2=0$$

$$-(x+k)^2+k^2+(y-12)^2-144+9k^2=0$$

$$-(x+k)^2+(y-12)^2-144+10k^2=0$$

$$-(x+k)^2+(y-12)^2=144-10k^2$$

Si quiero que el centro sea el $(4,12)$.

$$-(x+4)^2+(y-12)^2=144-10\cdot 4^2$$

$$-(x+4)^2+(y-12)^2=144-160$$

$$-(x+4)^2+(y-12)^2=-16$$

$$\frac{-(x+4)^2}{-16}+\frac{(y-12)^2}{-16}=1$$

RTA EN LA PARTE DE ATRAS

RTA: El valor de $k \in \mathbb{R}$ para que el centro de la conica sea el $(4, 12)$ es:

$$\boxed{k = 4}$$

Y la forma canónica de la Hiperbola queda:

$$-\frac{(x+4)^2}{-16} + \frac{(y-12)^2}{-16} = 1$$