APELLIDO ...   INSCRIPTO EN: HORARIO:

1	2	3	4	NOTA
B	B=	B	B	9(NUEVE)

Duración: 2:30 hs.

Los razonamientos usados para la resolución de los problemas deben figurar en la hoja.

1.- Calcular $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^3+5n+3}{n^3-4n+6}\right)^{\sqrt{n^4+5}}$.

2.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable y sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=f(2x-5)-4x$. Sabiendo que la ecuación de la recta tangente al gráfico de g en $(3,g(3))$ es $y=20x-68$, hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $(1,f(1))$.

3.- Sea $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-4x}+5x-1 & \text{si } x\le 0\\[2ex] \dfrac{\ln(x^3+3x^2+1)}{x} & \text{si } x>0\end{cases}$.

Hallar, si es posible, $f'(0)$.

4.- Dada $f(x)=x-3(x-2)^{\frac{2}{3}}$, determinar el dominio de f y el dominio de f'. Indicar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos locales de f. Encontrar la cantidad de soluciones de la ecuación $f(x)=1$.

1) $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m^3+5m+3}{m^3-4m+6}\right)^{\sqrt{m^4+5}}$

Cálculos auxiliares

$\lim_{m\to\infty}\frac{m^3+5m+3}{m^3-4m+6}=\frac{\infty}{\infty}=$ indeterminación

$\lim_{m\to\infty}\frac{m^3\left(1+\frac{5}{m^2}+\frac{3}{m^3}\right)}{m^3\left(1-\frac{4}{m^2}+\frac{6}{m^3}\right)}=\frac{1}{1}=1$

$\lim_{m\to\infty}\frac{m^3+5m+3}{m^3-4m+6}=1$

$\lim_{m\to\infty}(1)^{\sqrt{m^4+5}}=1^{\infty}$ indeterminación

$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m^3-4m+6}{m^3-4m+6}+\frac{m^3+5m+3}{m^3-4m+6}-\frac{m^3-4m+6}{m^3-4m+6}\right)^{\sqrt{m^4+5}}$

$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{9m-3}{m^3-4m+6}\right)^{\sqrt{m^4+5}}=\lim_{m\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{m^3-4m+6}{9m-3}}\right)^{\frac{m^3-4m+6}{9m-3}}}_{e}\right]^{\frac{9m-3}{m^3-4m+6}\cdot\sqrt{m^4+5}}=$

NOTA 4

$\boxed{e^9}$

sigue en hoja 4

↳ CA

Rta: $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m^3+5m+3}{m^3-4m+6}\right)^{\sqrt{m^4+5}}=e^9$

CA

$\lim_{m\to\infty}\frac{9m-3}{m^3-4m+6}\cdot\sqrt{m^4+5}=\lim_{m\to\infty}\frac{m\left(9-\frac{3}{m}\right)}{m\left(m^2-4+\frac{6}{m}\right)}\cdot\sqrt{m^4+5}=$

$\lim_{m\to\infty}\frac{\left(9-\frac{3}{m}\right)\cdot\sqrt{m^4+5}}{m^2-4+\frac{6}{m}}=\frac{\infty}{\infty}$ = aplico L'H = $\lim_{m\to\infty}\frac{9\cdot\sqrt{m^4+5}+(9m-3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{m^4+5}}\cdot 4m^3}{3m^2-4}$

$\lim_{m\to\infty}\frac{9\sqrt{m^4+5}+\frac{36m^4-12m^3}{2\sqrt{m^4+5}}}{3m^2-4}=\frac{\frac{18m^4+36m^4-12m^3+90}{2\sqrt{m^4+5}}}{3m^2-4}=\frac{\infty}{\infty}$

CA $\lim_{m\to\infty}\frac{54m^4-12m^3+90}{2\sqrt{m^4+5}}=\frac{\infty}{\infty}$ = L'H = $\frac{\frac{216m^3-36m^2}{4m^3}}{2\sqrt{m^4+5}}=\frac{m^3\cdot\left(216-\frac{36}{m}\right)\cdot 2\sqrt{m^4+5}}{4m^3}$

$=\frac{\infty}{4}$

2) $g(x) = f(2x-5)$ | Tangente a $g(x)$ en $x=3$ es $y = 20x - 68$

$g'(3) = 20$ → ya que es la pendiente de la tangente en $x = 3$

$g(3) = 20 \cdot 3 - 68$ → ya que la recta tangente a $g(x)$ en $x=3$ va a cortar a $g(x)$ únicamente en $x=3$, por lo que el valor en y de la recta tangente cuando $x=3$ va a ser igual al de $g(3)$

$g(3) = -8$

-8

$g(3) = f(2 \cdot 3 - 5) \overset{-12}{=} f(1) = -8$ → valor de $g(x)$ calculado previamente

$g'(x) = f'(2x-5) \cdot 2 - 4$

$g(3) = 4$

$g'(3) = f'(6-5) \cdot 2 - 4$

$4 + 20 = f'(1) \cdot 2$

$\cancel{10} = f'(1)$

12

T: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ → $x_0 = 1$

$y = f(1) + f'(1)(x-1)$

$y = -8 + 10(x-1)$

T: $y = -18 + 10x$

Rta la ecuación a la recta tangente de $f(1, f(1))$ va a ser $y = 10x - 18$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n-3}{n^3-4n+6} \cdot \sqrt{n^4+5} \overset{\text{AM}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(9-\frac{3}{n}\right)}{\cancel{n}\left(n^2-4+\frac{6}{n}\right)} \cdot \sqrt{n^4 \cdot \left(1+\frac{5}{n^4}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(9-\frac{3}{n}\right) \cdot \sqrt{n^4} \cdot \sqrt{1+\frac{5}{n^4}}}{n^2-4+\frac{6}{n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(9-\frac{3}{n}\right) \cdot \cancel{n^2} \cdot \sqrt{1+\frac{5}{n^4}}}{\cancel{n^2}\left(1-\frac{4}{n^2}+\frac{6}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(9-\frac{3}{n}\right) \cdot \sqrt{1+\underbrace{\frac{5}{n^4}}_{\to 0}}}{1-\underbrace{\frac{4}{n^2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{6}{n^3}}_{\to 0}} = \frac{9 \cdot 1}{1} =$$

$$\boxed{9}$$

) Sea $f(x) \begin{cases} \sqrt{1-4x}+5x-1 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\ln(x^3+3x^2+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Hallar $f'(0)$

$f(0) = \sqrt{1} + 5.0 - 1$
$1-1 = \boxed{0}$

Para hallar $f'(0)$ la función dada debería ser derivable, para que $f(x)$ sea derivable los límites por izquierda y derecha del cociente incremental de la función deberían coincidir. Por lo tanto:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} \rightarrow \boxed{3=3}$$

indeterminación

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{1-4h}+5h-1-0}{h} = \frac{0}{0} = \text{aplico L'hopital} >$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-4h}}\cdot -4 + 5}{1} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-4}{2\sqrt{1-4h}} + 5 = \frac{-4}{2\cdot\sqrt{1-4\cdot 0}} + 5 = \frac{-4}{2\cdot 1} + 5 =$$

$$-2+5 = \boxed{3}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{\ln(h^3+3h^2+1)}{h} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(h^3+3h^2+1)}{h^2} =$$

$$\frac{0}{0} = \text{aplico L'H} \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1}{h^3+3h^2+1}\cdot\frac{3h^2+6h}{1}\right)\cdot\frac{1}{2h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3h^2+6h}{(h^3+3h^2+1)\cdot 2h} = \frac{0}{0} =$$

$$\text{aplico L'H} = \lim_{h\to 0^+} \frac{6h+6}{(3h^2+6h)\cdot 2h + (h^3+3h^2+1)\cdot 2} =$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{6h+6}{6h^3+12h^2+2h^3+6h^2+2} = \frac{6\cdot 0+6}{6\cdot 0^3+12\cdot 0^2+2\cdot 0^3+6\cdot 0^2+2} = \frac{6}{2} = \boxed{3}$$

Rta: $\boxed{f'(0) = 3}$

4) $f(x) = x - 3\sqrt[3]{(x-2)^2}$

Dom = $\mathbb{R}$ ya que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x)$

AV = $\emptyset$ ya que $f(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}$

AH:

$$\lim_{x \to +\infty} \overset{\infty}{x} - \overset{-\infty}{3(x-2)^{\frac{2}{3}}} = \infty - \infty =$$

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{3(x-2)^{\frac{2}{3}}}{x}\right)$$

$$\infty(1-0) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} = -\infty(1-0) = -\infty$$

AH = $\emptyset$

CA

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3(x-2)^{2/3}}{x} = \frac{\infty}{\infty} = L'H:$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}}{1} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt[3]{x-2}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$\sqrt[3]{x-2} \to \infty$

$$f'(x) = 1 - 3 \cdot \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}} = 1 - 2(x-2)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x-2}}$$

$\text{Dom } f'(x) = \mathbb{R} - \{2\}$

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 10)$	10	$(10, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max abs	$\searrow$	min abs	$\nearrow$

$f'(x) = 0$

$1 - \frac{2}{\sqrt[3]{(x-2)}} = 0$

$1 = \frac{2}{\sqrt[3]{(x-2)}}$

$\sqrt[3]{(x-2)} = 2$

$(x-2) = 2^3$

$\boxed{x = 10}$

(*)

$f'(1) = 1 - \frac{2}{-1} = 3$

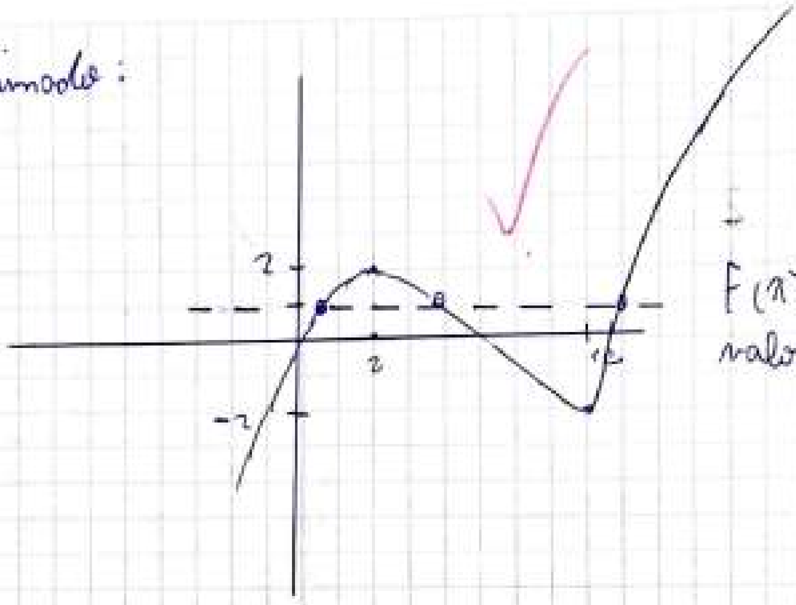
$f'(3) = 1 - \frac{2}{1} = -1$

$f'(29) = 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{27}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

(*) cuando $f'(x) > 0 \rightarrow f(x) \nearrow$ (crece)

" $f'(x) < 0 \rightarrow f(x) \searrow$ (decrece)

Sé que $f'(x)$ en los intervalos $(-\infty, 2), (2, 10)$ y $(10, +\infty)$ es continua y no tiene raíces ya que la única es $x = 10$. Por el teorema de Bolzano sé que en los intervalos habrá un signo constante para todos los puntos, es decir, no habrá cambio de signo. Por ende, si calculo el signo de un punto de cada intervalo, podré saber el signo de todos los puntos de dicho intervalo grafico aproximado:



$F(x) = 1$ tiene 3 valores

$F(2) = 2 - 3(2-2)^{\frac{2}{3}} = \boxed{2}$

$f(10) = 10 - 3(10-2)^{\frac{2}{3}} = 10 - 3.4 = \boxed{-2}$

Rta: $Dom\, f = \mathbb{R}$

$Dom\, f' = \mathbb{R} - \{2\}$

I Crecimiento: $(-\infty, 2) \cup (10; +\infty)$

I Decrecimiento: $(2, 10)$

Max abs: $(2, 2)$

Min abs: $(10, -2)$

Cantidad de soluciones de $f(x) = 1 \rightarrow 3$