PUNTAJE	**1) 2 puntos**	**2) a) 0,5 punto b) 0,5 punto c) 1 punto**	**3) 2,5 puntos**	**4 al 10) 0,5 cada uno**

1) ***Dadas la matriz*** $M=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}$ ***Hallar los valores de x, y que verifican*** $M\cdot M^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$***, dónde*** M^T ***representan la matriz M traspuesta.***

En primer término, planteamps la operación indicada

$$M\cdot M^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \quad \text{siendo } M=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}\to M^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & y\end{pmatrix}$$

$$M\cdot M^T=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x^2 & xy\\ xy & y^2\end{pmatrix}$$

Planteamos la igualdad dada

$$M\cdot M^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1+x^2 & xy\\ xy & y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\to\begin{cases}1+x^2=1\to\boxed{x=0}\\ xy=0 \text{ se verifica para los valores de } x, y \text{ determinados}\\ xy=0 \text{ se verifica para los valores de } x, y \text{ determinados}\\ y^2=4\to\boxed{y=\pm 2}\end{cases}$$

Reemplazando en la matriz M, se obtiene dos posibles matrices que cumplen la condición

$$\boxed{M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\vee M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}}$$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 6 para revisar el tema Operaciones con matrices

2) a) Determinar la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x+5y-3z-7=0$ ***y*** $\pi_2: 4x+2y+6z+4=0$***, indicando si son paralelos o perpendiculares.***

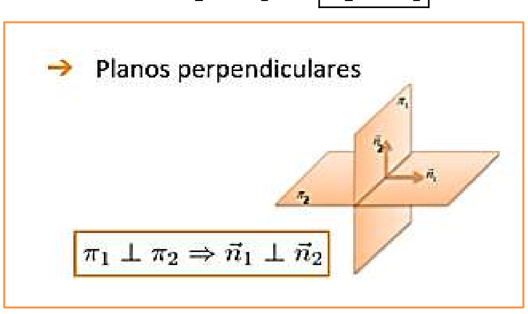
Para determinar si los planos son paralelos o perpendiculares necesitamos los vectores normales de cada uno de ellos

$$\pi_1: 2x+5y-3z-7=0\to\overrightarrow{n_1}=(2;5;-3)$$

$$\pi_2: 4x+2y+6z+4=0\to\overrightarrow{n_2}=(4;2;6)$$

Analicemos si los vectores normales son perpendiculares, para ello aplicamos la definición que establece que serán perpendiculares los vectores normales si se cumple que su producto escalar es nulo.

$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=(2;5;-3)\cdot(4;2;6)=2.4+5.2-3.6=0\to\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{n_1}\to\boxed{\overrightarrow{\pi_2}\perp\overrightarrow{\pi_1}}$ ***, esto se puede observar en la siguiente figura.***



Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 3 para revisar el tema planos perpendiculares

b) Calcular el valor de $m \in \Re$ para que π_1 dado sea perpendicular a la recta de ecuación $\frac{x-3}{-4}=\frac{y+4}{-10}=\frac{z-1}{m}$

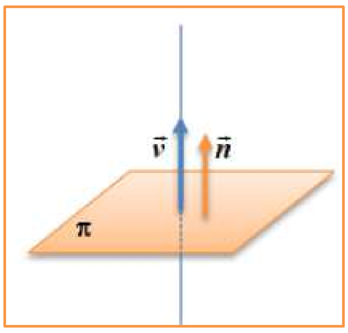
Nuevamente para poder hallar el valor de m debemos trabajar con el vector normal del plano y el vector director de la recta, el plano sea paralelo a la recta el vector normal del plano debe ser perpendicular al vector director de la recta

$$\pi_1 : 2x+5y-3z-7=0 \rightarrow \overrightarrow{n_1}=(2;5;-3)$$

$$r : \frac{x-3}{-4}=\frac{y+4}{-10}=\frac{z-1}{m} \rightarrow \overrightarrow{v_r}=(-4;-10;m)$$

$\boxed{\pi_1 \perp r \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{v_r}}$ *esto se cumple si:*

$\boxed{\overrightarrow{v_r}=k\overrightarrow{n_1}}$ *o* $\boxed{\frac{v_{rx}}{n_{1x}}=\frac{v_{ry}}{n_{1y}}=\frac{v_{rz}}{n_{1z}}=k} \rightarrow \frac{-4}{2}=\frac{-10}{5}=\frac{m}{-3} \rightarrow -2=\frac{m}{-3} \rightarrow \boxed{m=6}$



Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 4 para revisar el tema plano y recta perpendiculares

c) Hallar la ecuación del plano π_3 que pasa por $P_0=(2;-1;8)$ y es paralelo al plano $\pi_4 : 3x-z+2=0$

Para hallar la ecuación del plano necesitamos conocer un punto del plano y su vector normal, el dato dado es que el plano es paralelo al plano dado $\pi_4 : 5x-y+4=0$, entonces el vector normal del plano π_4 sirve como normal del plano buscado

Datos para hallar el plano

$$\pi_3 : \begin{cases} P_0=(2;-1;8) \\ \vec{n}_3=(3;0;-1) \end{cases}$$

$\boxed{\pi_3 = \overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}_3=0}$ *Ecuación del plano*

Calculamos el vector $\overrightarrow{P_0P}$

$$\overrightarrow{P_0P}=(x;y;z)-(2;-1;8)=(x-2;y+1;z-8)$$

$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}_3=0 \rightarrow (x-2;y+1;z-8)\cdot(3;0;-1)=0$$

$$\pi_3 : 3(x-2)+0\cdot(y+1)+(-1).(z-8)=0$$

$$\pi_3 : 3x-6-z+8=0 \rightarrow \boxed{\pi_3 : 3x-z+2=0}$$

Recomendación: Puedes rever el tema Ecuación de un plano en la Unidad 1

3) *Dado el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} kx - y + z = 1 \\ 3x - y + kz = k \\ x + (k-1)z = 1 \end{cases}$$

Determinar los valores $k \in \Re$, para que el sistema admita solución única, infinitas soluciones y no admita solución.

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} kx - y + z = 1 \\ 3x - y + kz = k \\ x + (k-1)z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ 3 & -1 & k \\ 1 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & k \end{vmatrix} + (k-1)\begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -k + 1 + (k-1)(-k+3) =$$

$$= -k + 1 - k^2 + 3k + k - 3 = -k^2 + 3k - 2$$

Buscamos los valores que anulan el determinante de A

$$-k^2 + 3k - 2 = 0 \rightarrow k^2 - 3k + 2 = 0 \rightarrow \boxed{k = 1 \vee k = 2}$$

A partir de estos valores se analiza el sistema reemplazando en la matriz ampliada por cada uno de ellos.

1) *Si* $k \neq 1 \wedge k \neq 2 \rightarrow SCD$

2) *Evaluamos el sistema en* $k = 1$, *en este caso la matriz ampliada del sistema es:*

$$\begin{cases} kx - y + z = 1 \\ 3x - y + kz = k \\ x + (k-1)z = 1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow r(A) \neq r(A') \therefore SI$$

3) *Evaluamos el sistema en* $k = 2$, *en este caso la matriz ampliada del sistema es:*

$$\begin{cases} kx - y + z = 1 \\ 3x - y + kz = k \\ x + (k-1)z = 1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow r(A) = r(A') = 2 < 3 \therefore SCI$$

$$\boxed{\begin{array}{l} SCD : \Re - \{1,2\} \\ SCI : k = 2 \\ SI : \quad k = 1 \end{array}}$$

***Recomendación:** Puedes rever las tutorías en línea 27 y 29 para revisar el tema análisis de un sistema de ecuaciones en función de un parámetro*

4) *Siendo las matrices* $A=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}$ *y* $C=\begin{pmatrix}2&2\\0&1\end{pmatrix}$ *la matriz X que satisface la ecuación* $A^2\cdot X+B=C$ *es:*

- ☐ *a)* $X=\begin{pmatrix}-4&2\\-2&0\end{pmatrix}$
- ☐ *b)* $X=\begin{pmatrix}-8&2\\-2&0\end{pmatrix}$
- ☐ *c)* $X=\begin{pmatrix}0&2\\-2&8\end{pmatrix}$
- ☐ *d)* $X=\begin{pmatrix}0&2\\-2&-4\end{pmatrix}$

Recomendación: Puedes rever las tutorías en línea 18 y 19 para revisar el tema ecuaciones matriciales

5) *Para qué valores de* $a\in\Re$, *el rango de la matriz A es igual a 3, siendo* $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\-a&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$

- ☐ *a)* $\forall a\in\Re-\{-1,0\}$
- ☐ *b)* $\forall a\in\Re$
- ☐ *c)* $\nexists a\in\Re$
- ☐ *d)* $a\in\{-1,0\}$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 15 para revisar el tema rango de una matriz

6) *Sabiendo que* $|P|=\begin{vmatrix}m&n&p\\-1&0&1\\3&3&3\end{vmatrix}=2$, *entonces el determinante* $|Q|=\begin{vmatrix}-3&0&3\\m&n&p\\6-m&6-n&6-p\end{vmatrix}$ *es:*

- ☐ *a)* $|Q|=6$
- ☐ *b)* $|Q|=12$
- ☐ *c)* $|Q|=-6$
- ☐ *d)* $|Q|=-12$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 14 para revisar el tema propiedades de los determinantes

7) *Los valores de* $m\in\Re$ *tales que la matriz A sea no singular siendo* $A=\begin{pmatrix}2&3&m\\1&m&1\\0&m&-1\end{pmatrix}$ *son:*

- ☐ *a)* $m\neq 1\wedge m\neq 3$
- ☐ *b)* $m=1\vee m=3$
- ☐ *c)* $\nexists m\in\Re$
- ☐ *d)* $\forall m\in\Re$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 21 para revisar el tema matriz inversa.

8) *El o los valores de* $x\in\Re$ *que verifican la ecuación* $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&x&1\\1&1&x^2\end{vmatrix}=0$

- ☐ *a)* $x=-1\vee x=1$
- ☐ *b)* $\forall x\in\Re$
- ☐ *c)* $x=0\vee x=1$
- ☐ *d)* $\nexists x\in\Re$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 13 para revisar el tema cálculo de determinantes

9) *Sea el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} x + y + w = 3 \\ z - w = 2 \\ x + y - z + 2w = 1 \end{cases}$ *entonces el conjunto solución del sistema es:*

☐ *a)* $\varnothing$

☐ *b)* $\{(3 - w - y; y; 2 + w; w), con\ y, w \in \Re\}$

☐ *c)* $\{(0; 0; 0)\}$

☐ *d)* $\{(-w - y; y; w; w), con\ y, w \in \Re\}$

Recomendación: Puedes rever las tutorías en línea 25 y 26 para revisar el tema resolución de sistemas de ecuaciones lineales compatibles indeterminados

10) *En una economía hipotética de dos industrias A y B la matriz de los coeficientes tecnológicos es* $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Si el vector producción es $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 120 \\ 140 \end{pmatrix}$ *, entonces la demanda final es:*

☐ *a)* $\mathbf{DF} = \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \end{pmatrix}$

☐ *b)* $\mathbf{DF} = \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \end{pmatrix}$

☐ *c)* $\mathbf{DF} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix}$

☐ *d)* $\mathbf{DF} = \begin{pmatrix} 40 \\ 8 \end{pmatrix}$

Recomendación: Puedes rever la tutoría en línea 16 para revisar el tema Matriz de Insumo Producto