UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 1er. parcial - 18/09/24 - Tema 12

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)
  Considerá el conjunto $A = \{(0, -3, -1), (k, 4, 0), (-3, 0, k - 3)\}$. Elegí la opción que muestra los valores que puede tomar k si se quiere que A sea un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^3$.

  A) $k \in \{1, -4\}$
  B) $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$
  C) $k \in \mathbb{R} \setminus \{1, -4\}$
  D) $k \in \emptyset$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  Resulta más cómodo ver cuando $A = \{(0, -3, -1), (k, 4, 0), (-3, 0, k - 3)\}$ no es un generador de $\mathbb{R}^3$ y descartar esos valores. Para que no sea generador debe ocurrir que los vectores deben ser L.D. con lo cual el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ k & 4 & 0 \\ -3 & 0 & k-3 \end{pmatrix}$ debe ser cero. De esto obtenemos que $3k^2 - 9k - 12 = 0$ de donde salen los valores de k para los cuales el conjunto no es una base. Entonces los valores para los cuales el conjunto es generador de $\mathbb{R}^3$ son $\mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)
  Considerá el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : nx_1 + x_2 = 0\}$ decidí cual opción de valores n y m para los cuales el conjunto $A = \{(0, 0, 1), (1, 0, m)\}$ resulta una base de S sabiendo que el punto $(-\frac{3}{7}, \frac{1}{4}, 0)$ pertenece a S.

  A) $n = -\dfrac{7}{12}$ y $m = -\dfrac{7}{12}$
  B) $n = \dfrac{7}{12}$ y $m = -\dfrac{7}{12}$
  C) $n = \dfrac{7}{12}$ y $m = \dfrac{7}{12}$
  D) $n = -\dfrac{7}{12}$ y $m = \dfrac{7}{12}$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  Reemplazando $(1, 0, m)$ en $nx_1 + x_2 = 0$ obtenemos $m = -n$ mientras que al reemplazar $(-\frac{3}{7}, \frac{1}{4}, 0)$ tenemos $-\frac{3}{7}n + \frac{1}{4} = 0$ con lo cual $n = \frac{7}{12}$ y por lo tanto $m = -\frac{7}{12}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)
  Indicá la opción que muestra la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $(-9; 0)$ y $(9; 0)$ y cuya distancia entre sus vértices es 6.

  A) $\dfrac{y^2}{72} - \dfrac{x^2}{9} = 1$
  B) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{72} = 1$
  C) $\dfrac{x^2}{72} - \dfrac{y^2}{9} = 1$
  D) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{72} = 1$

  Opción correcta: B)
  Resolución
  Como la distancia entre los vértices es 6, entonces la distancia entre el centro y cada vértice es 3. También podemos deducir que la distancia entre los focos es 18, entonces $c = 9$ y usando que $c^2 = a^2 + b^2$ averiguamos que $b^2 = 72$. Con estos datos obtenidos es posible escribir la ecuación de la hipérbola: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{72} = 1$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)
  Elegí entre las opciones, aquella que muestra el valor exacto de la excentricidad y las coordenadas del centro de la cónica $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + y^2 - 6x + 30y + 216 = 0\}$

  A) $e = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$; $(1,-15)$

  B) $e = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$; $(1,-15)$

  C) $e = \sqrt{3}$; $(-1,15)$

  D) $e = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$; $(-1,15)$

  Opción correcta: A)
  Resolución
  Tras completar cuadrados en la ecuación dada, se puede construir la ecuación canónica de la cónica: $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+15)^2}{12} = 1$. Desde aquí se puede leer y deducir que se trata de una elipse de centro $(1;-15)$ con eje focal paralelo al $ejey$ y en consecuencia, vale la igualdad $12 = 4 + c^2$ de donde se deduce que $c = \sqrt{8}$. Finalmente, la excentricidad será $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
  Considerá los vectores $\vec{a} = (k,0,k)$ y $\vec{b} = (k,k,k)$ con $k \in \mathbb{R}$ y α es el ángulo determinado por dichos vectores. Elegí la única opción que muestra el valor de $\cos(\alpha)$.

  A) $-\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{2}{6}$ C) $-\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ D) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

  Opción correcta: D)
  Resolución
  El cálculo del producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos(\alpha)$ permitirá resolver la ecuación:
  $2k^2 = \sqrt{2}|k| \cdot \sqrt{3}|k| \cdot \cos(\alpha)$. Así se puede determinar el valor de $\cos(\alpha)$.
  Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
  $\vec{v}$ es un vector de $\mathbb{R}^3$ paralelo al versor $\hat{j}$, de norma 9 y con una de sus coordenadas negativa. Si $A = \left(\frac{15}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{1}{10}\right)$ es el punto medio entre los extremos de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$, elegí la opción que indica las coordenadas de $\vec{u}$.

  A) $\left(-\dfrac{15}{2}, -\dfrac{9}{2}, \dfrac{1}{10}\right)$ B) $\left(-15, -18, \dfrac{1}{5}\right)$ C) $\left(\dfrac{15}{2}, 9, -\dfrac{1}{5}\right)$ D) $\left(15, 18, -\dfrac{1}{5}\right)$

  Opción correcta: D)
  Resolución
  Si $\vec{v}$ es paralelo al versor $\hat{j}$ es de la forma $\vec{v} = (0,m,0)$. Como su norma es 9 y tiene una coordenada negativa, luego $\vec{v} = (0,-9,0)$. Como $A = \left(\frac{15}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{1}{10}\right)$ es el punto medio entre los extremos de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$, puede plantearse la igualdad: $\left(\frac{0+u_x}{2}, \frac{-9+u_y}{2}, \frac{0+u_z}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{1}{10}\right)$. Igualando coordenada a coordenada, se puede obtener la respuesta al problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)
  Elegí la opción que indica cuánto mide la distancia entre el punto $A = (2,-1,-1)$ y la recta $r = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(2,2,1) + (2,1,1), t \in \mathbb{R}\}$.

  A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ D) 2

  Opción correcta: D)
  Resolución
  Para calcular la distancia pedida se puede escribir la ecuación de plano que contiene al punto A y es normal a la recta r, luego encontrar el punto de intersección entre la recta y el plano -en este caso es $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$- y, por último, calcular la distancia entre ese punto y A. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)
 Considerá las ecuaciones de los planos $\pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -3x + 3y = -3 + 3z\}$ y
$\pi_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = n(1, 1, 0) + k(2, 0, 2) + (1, 1, 1); n, k \in \mathbb{R}\}$.
Elegí la opción que indica la posición relativa de los planos.

A) Son paralelos.

B) Son coincidentes.

C) Son perpendiculares.

D) La intersección es una recta y no son perpendiculares.

Opción correcta: D)
Resolución
Los puntos del plano π_2 pueden escribirse como $(n+2k+1, n+1, 2k+1), n, k \in \mathbb{R}$. Al reemplazarlo en la ecuación de π_1 -en busca de la intersección- se obtiene $k = 0$. Para ese valor obtenido, si se lo reemplaza en la ecuación de π_2 se obtiene la ecuación de una recta. De esta forma puede descartarse que sean paralelos o coincidentes. Basta probar que el producto escalar entre el vector normal a π_1 y el vector normal a π_2 -puede obtenerse con el producto vectorial entre sus vectores directores- no es nulo. Luego, los planos no son perpendiculares y tienen como intersección una recta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.